Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, matematisk analys (5B1304), den 8/1 2003, kl 14^{00}–19^{00}

Hjälpmedel: β Mathematics Handbook, Kreyszig och kurslitteratur från tidigare matematikkurser, föreläsningsanteckningar samt räknedosa utan ”Computer Algebra System” (= automatisk formelbehandling).
Gamla tentamina med lösningar är inte tillåtna.

Fordringar:

Betyg:	3	4	5
Minimipoäng totalt:	12	16	22
Minsta antal uppgifter med ≥ 2p:	3		
Min.poäng sammanlagt på uppgifterna 1, 2, 3, 4 resp 5, 6, 7:	3	4	4

Om Du tar resultat från β så bör använd sida *och handbokens upplagenummer* anges!

1. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$(1-2x)y'' + 4xy' - 4y = 0,$$

då man vet att $y = e^{2x}$ är en lösning. (3p)

2. Uttryck på så enkel form som möjligt lösningarna till differentialekvationen

$$xy'' + 2y' + 9xy = 0, \; x > 0. \qquad (2p)$$

3. Låt
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) = e^t, \text{ då } 0 < t < 2\pi.$$

Beräkna $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$. (3p)

4. a. Problemet

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \; 1 \le x \le 2,$$

med bivillkoren $y(1) = y(2) = 0$ är ett Sturm-Liouville-problem. Bestäm dess viktsfunktion. (1p)

b. Bestäm problemets egenvärden och egenfunktioner. (3p)

---

5. a. Överför problemet $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = x^2,\; u(x,0) = x^2, t \ge 0, \; -\infty < x < \infty$, till en ordinär differentialekvation i x genom att laplacetransformera med avseende på variabeln t, (dvs. sätt $\tilde{u}(x,s) = \int_0^{\infty} u(x,t)e^{-st}\,dt$). (2p)

b. Bestäm $\tilde{u}(x,s)$ ur det transformerade problemet. (Beakta därvid att $\tilde{u}(x,s)$ måste vara definierad för *alla* x om s är tillräckligt stort.) (3p)

c. Bestäm slutligen lösningen $u(x,t)$ till problemet i a. ovan. (1p)

Var god vänd!

6. a. Transformera integralen $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{13 + 12\cos x}$ till en kurvintegral över enhetscirkeln i det komplexa talplanet. (1p)

b. Beräkna integralen med hjälp av residuumkalkyl. (3p)

7. Beräkna

$$\oint_{\mathbf{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

då $\boldsymbol{F} = (3z, z, 0)$ och $\mathbf{C}$ är den cirkel som ligger i planet $x + y + z = 1$, har medelpunkten i $(0, 0, 1)$ och radien 1. Kurvan genomlöps medurs för en betraktare placerad i origo. (2p)

Lycka till!