Institutionen för matematik
KTH
B.Ek

Lösningar tentamen 5B1928 Logik för D1, 26 maj 2003

1) Antag först att svaranden är kung. Då talar han sanning när han säger att advokaten talar sanning. Men advokaten säger att svaranden är narr. Motsägelse, så svaranden är narr.
Svaranden ljuger alltså när han säger att advokaten alltid talar sanning. Advokaten är alltså narr och ljuger alltid, också när han säger att svaranden är narr och inte skyldig. Att svaranden är narr är sant, så det måste vara falskt att han inte är skyldig.
Svar: ja, det går att avgöra, han är skyldig.
Formellt, om man låter A betyda "Advokaten är kung", B betyda "Svaranden är kung" och S betyda "Svaranden är skyldig", ser man att $A \leftrightarrow (\sim B \,\&\sim S)$ och $B \leftrightarrow A$ är sanna. T.ex. med tabell ser man att ovanstående är enda möjligheten.

2) Att visa: $A \vee B,\ \sim(A \vee C) \vdash \sim(B \rightarrow C)$.
Idé: Enligt premiss 2 gäller varken A eller C, så med premiss 1 fås B. Således B och $\sim C$, dvs $\sim(B \rightarrow C)$.

1	(1)	$A \vee B$	premiss	
2	(2)	$\sim(A \vee C)$	premiss	
3	(3)	$B \rightarrow C$	antagande	
4	(4)	A	antagande	
4	(5)	$A \vee C$	4	$\vee$I
6	(6)	B	antagande	
3,6	(7)	C	3,6	$\rightarrow$E
3,6	(8)	$A \vee C$	7	$\vee$I
1,3	(9)	$A \vee C$	1,4,5,6,8	$\vee$E
1,2,3	(10)	$\curlywedge$	2,9	$\sim$E
1,2	(11)	$\sim(B \rightarrow C)$	3,10	$\sim$I

Slutsatsen på rad (11) beror bara av premisserna på rad (1) och (2), så härledningen är klar.

Med SI-regler blir det lite kortare (och man slipper den fruktade $\vee$E-regeln):

1	(1)	$A \vee B$	premiss	
2	(2)	$\sim(A \vee C)$	premiss	
2	(3)	$A \,\&\sim C$	2	SI(DeM)
2	(4)	$\sim A$	3	&E
1,2	(5)	B	1,4	SI(DS)
2	(6)	$\sim C$	3	&E
1,2	(7)	$B \,\&\sim C$	5,6	&I
1,2	(8)	$\sim(B \rightarrow C)$	7	SI(Neg-Imp)

3) Vi skall visa att $\forall x\, \exists y\, (Px \leftrightarrow Qy) \nvDash \exists y\, \forall x\, (Px \leftrightarrow Qy)$.
Påståendet visas av en tolkning som gör den vänstra sentensen sann och den högra falsk. För alla s skall en sådan tolkning göra $Ps \leftrightarrow Qt$ sann för något t, men det skall inte duga med samma t för alla s. Tydligen fungerar tolkningen:
$D = \{\alpha, \beta\}$, $\quad \mathrm{Ext}(P) = \mathrm{Ext}(Q) = \{\alpha\}$, ty då är
$\forall x\, \exists y\, (Px \leftrightarrow Qy)$ **sann**,
  ty $\exists y\, (Pa \leftrightarrow Qy)$ och $\exists y\, (Pb \leftrightarrow Qy)$ båda sanna,
    ty $(Pa \leftrightarrow Qa)$ och $(Pb \leftrightarrow Qb)$ sanna,
      ty Pa, Qa sanna och Pb, Qb falska, (ty $\alpha \in \mathrm{Ext}(P), \mathrm{Ext}(Q)$, $\beta \notin \mathrm{Ext}(P), \mathrm{Ext}(Q)$).
$\exists y\, \forall x\, (Px \leftrightarrow Qy)$ **falsk**,
  ty $\forall x\, (Px \leftrightarrow Qa)$ falsk,
    ty $Pb \leftrightarrow Qa$ falsk,
      ty Pb falsk och Qa sann, (ty $\beta \notin \mathrm{Ext}(P)$ och $\alpha \in \mathrm{Ext}(Q)$).

4) Att visa: $\forall x\,(Px \vee Qx),\ \exists x\,(Px \rightarrow Qx)\ \vdash\ \exists x\,Qx$.

Idé: Antag (enligt premiss 2) $Pa \rightarrow Qa$. Premiss 1 ger $Pa \vee Qa$. Dessa leder till Qa, så $\exists x\,Qx$.

1	(1)	$\forall x\,(Px \vee Qx)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\,(Px \rightarrow Qx)$	premiss		
3	(3)	$Pa \rightarrow Qa$	antagande		
1	(4)	$Pa \vee Qa$	1	$\forall$E	
5	(5)	Pa	antagande		
3,5	(6)	Qa	3,5	$\rightarrow$E	
7	(7)	Qa	antagande		
1,3	(8)	Qa	4,5,6,7,7	$\vee$E	
1,3	(9)	$\exists x\,Qx$	8	$\exists$I	
1,2	(10)	$\exists x\,Qx$	2,3,9	$\exists$E	[a inte i (2),(9),(1)]

Slutsatsen på rad (10) beror bara av premisserna på rad (1) och (2), så saken är klar.

5) För att avgöra om $\forall x\,(Fx \vee Gx), \exists x\,(Fx \,\&\, Gx)\ \vDash\ \forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$ söker vi motexempel (tolkningar som gör premisserna sanna och slutsatsen falsk):

	$\mathbb{T}$:	$\forall x\,(Fx \vee Gx)$	a_3, b_4
	$\mathbb{T}$:	$\exists x\,(Fx \,\&\, Gx)$	$\surd_{1:a}$
	$\mathbb{F}$:	$\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$	$\surd_{2:b}$
1	$\mathbb{T}$:	$Fa \,\&\, Ga$	$\surd_5$
2	$\mathbb{F}$:	$Fb \rightarrow Gb$	$\surd_6$
3	$\mathbb{T}$:	$Fa \vee Ga$	$\surd_7$
3	$\mathbb{T}$:	$Fb \vee Gb$	$\surd_8$
5	$\mathbb{T}$:	Fa	
5	$\mathbb{T}$:	Ga	
6	$\mathbb{T}$:	Fb	
6	$\mathbb{F}$:	Gb	

7 $\mathbb{T}$: Fa 7 $\mathbb{T}$: Ga

8 $\mathbb{T}$: Fb 8 $\mathbb{T}$: Gb $\times$ 8 $\mathbb{T}$: Fb 8 $\mathbb{T}$: Gb $\times$

I tablån växlar de tre faserna enligt:
1. Satslogiska 5,6,7,8
2. $\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$ 1,2
3. $\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$ 3,4

Tablån sluter sig inte, så slutledningen är inte giltig. Ett motexempel läses av:
$D = \{\alpha, \beta\}$, $\quad \mathrm{Ext}(F) = D$, $\quad \mathrm{Ext}(G) = \{\alpha\}$.

6) 1. ”Varje hacker känner minst en annan hacker”
dvs ”För alla x : om x är hacker finns y så att x inte är y och y är hacker och x känner y”
så **svar**: $\forall x\,(Hx \rightarrow \exists y\,(x \neq y \,\&\, Hy \,\&\, Kxy)$
2. ”Det finns precis en (en och endast en) hacker”
dvs ”Det finns x så att x är hacker och för alla y : om y är hacker är $x\,y$”
så **svar**: $\exists x\,(Hx \,\&\, \forall y\,(Hy \rightarrow x = y))$
Logiskt ekvivalenta varianter är förstås möjliga.

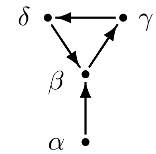
7) Att visa: $\forall x\,\exists y\,Pxy,\ \sim\!\forall x\,Pxx\ \vdash\ \sim\!\forall x\,\forall y\,x = y$.

Idé: Enligt premiss 1 går från varje element minst en pil. Om det bara finns ett element går pilen till samma element, vilket premiss 2 förbjuder. Det kan alltså inte bara finnas ett element.

1	(1)	$\forall x\,\exists y\,Pxy$	premiss		
2	(2)	$\sim\!\forall x\,Pxx$	premiss		
3	(3)	$\forall x\,\forall y\,x = y$	antagande		
1	(4)	$\exists y\,Pay$	1	$\forall$E	
5	(5)	Pab	antagande		
3	(6)	$\forall y\,b = y$	3	$\forall$E	
3	(7)	$b = a$	6	$\forall$E	
3,5	(8)	Paa	7,5	$=$E	
1,3	(9)	Paa	4,5,8	$\exists$E	[b inte i (4),(8),(3)]
1,3	(10)	$\forall x\,Pxx$	9	$\forall$I	[a inte i (1),(3)]
1,2,3	(11)	$\curlywedge$	2,10	$\sim$E	
1,2	(12)	$\sim\!\forall x\,\forall y\,x = y$	3,11	$\sim$I	

Slutsatsen på rad (12) beror bara av premisserna på raderna (1) och (2), så saken är klar.

8) Vi skall avgöra om
$\forall x\,\forall y\,(Rxy \to \sim Ryx),\ \forall x\,\exists y\, Rxy\ \vDash\ \forall y\,\exists x\, Rxy$.



Premiss 1 säger att inga pilar är dubbelriktade och premiss 2 säger att det går minst en pil från varje element. Men härur följer **inte** att det går minst en pil till varje element (den tänkta slutsatsen), se fig. Så
Svar: slutledningen är inte korrekt, ett motexempel:
$D = \{\alpha, \beta\}, \quad \mathrm{Ext}(R) = \{\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\delta\rangle, \langle\delta,\beta\rangle\}$

9) Vi har:
$\alpha)\ \vDash p\ \Rightarrow\ \vDash q \to r$ och $\beta) \vDash p \,\&\, q\ \Rightarrow\ \vDash r$.
Så 'icke-α)' $\vDash p$ och $\nvDash q \to r$ och 'icke-β)' $\vDash p \,\&\, q$ och $\nvDash r$
Så om 'icke-β': p, q sanna i alla tolkningar och r falsk i någon tolkning. Men då är också $q \to r$ falsk i den tolkningen, så 'icke-α'. Alltså 'icke-β' $\Rightarrow$ 'icke-α' och därmed $\alpha)\ \Rightarrow\ \beta)$.
Men $p : A \vee \sim A,\ \ q : A,\ \ r : A \,\&\, B$ ger $\vDash p$ och $\nvDash q \to r$, dvs 'icke-α' gäller, men $\nvDash p \,\&\, q$, så 'icke-β' gäller inte. Så 'icke-α' $\nRightarrow$ 'icke-β' och därmed $\beta)\ \nRightarrow\ \alpha)$. Så
Svar: $\alpha)\ \Rightarrow\ \beta)$ **gäller, men inte** $\beta)\ \Rightarrow\ \alpha)$.

10) Låt ϕx vara formeln $S(S(0)) * x = x + x$. Vi skall visa $\forall x\, \phi x$.
Man får $S(S(0)) * 0 \overset{\text{P5}}{=} 0 \overset{\text{P3}}{=} 0 + 0$, dvs $\phi 0$.
Antag att ϕa gäller, dvs $S(S(0)) * a = a + a$.
Då gäller $S(S(0)) * S(a) \overset{\text{P6}}{=} S(S(0)) * a + S(S(0)) \overset{\phi a}{=} (a+a) + S(S(0)) \overset{\text{P4}}{=} S((a+a) + S(0)) \overset{\text{P4}}{=} S(S((a+a)+0)) \overset{\text{P3}}{=} S(S(a+a)) \overset{\text{P4}}{=} S(a + S(a)) \overset{\text{givet}}{=} S(a) + S(a)$, dvs $\phi S(a)$, för godtyckligt a och därmed $\forall x\,(\phi x \to \phi S(x))$.
Så $\phi 0 \,\&\, \forall x\,(\phi x \to \phi S(x))$ gäller och enligt axiom P7 (med $n = 0$), $\forall x\, \phi x$, dvs det önskade.

11) Vi skall visa att $A \leftrightarrow B,\ \Box\,(C \to B),\ \Diamond\,(A \,\&\, \sim B)\ \nvDash_{S5}\ \Box\,(C \to (B \to A))$.
Vi söker en tolkning som gör sentenserna till vänster sanna och den till höger falsk.
$A \leftrightarrow B$ sann betyder att $w^*[A] = w^*[B]$.
$\Box\,(C \to B)$ sann betyder att $w[C] \leq w[B]$ för alla $w \in \mathcal{W}$.
$\Diamond\,(A \,\&\, \sim B)$ sann betyder att $w[A] = 1, w[B] = 0$ för något $w \in \mathcal{W}$.
$\Box\,(C \to (B \to A))$ falsk betyder att $w[C \to (B \to A)] = 0$ för något $w \in \mathcal{W}$, dvs $w[C] = 1,\ w[B \to A] = 0$, dvs $w[C] = w[B] = 1,\ w[A] = 0$.
En tolkning som visar påståendet ges alltså av:
$\mathcal{W} = \{w^*, u, v\}, \quad w^*[A] = w^*[B] = 1,\ w^*[C] = 0$ (eller 1),
$u[A] = 1,\ u[B] = u[C] = 0, \quad v[A] = 0,\ v[B] = v[C] = 1$.

12) Vi skall visa att $\Box\,\forall x\, Fx\ \vdash_{S5}\ \Diamond\,\exists x\, Fx$.
Idé: Premissen säger att Fa gäller i alla världar för alla a som finns i den världen. Eftersom vi vet att det finns minst ett element i någon värld, får vi att det finns en värld där det existerar ett a med Fa sann, dvs slutsatsen. Eftersom resonemanget använde att det finns minst ett element i minst en värld, bör man använda $\Diamond\exists$-regeln i härledningen.

1	(1)	$\Box\,\forall x\, Fx$	premiss		
	(2)	$\Diamond\, Ea$		$\Diamond\exists$	
3	(3)	Ea	antagande		
1	(4)	$\forall x\, Fx$	1	$\Box$E	
1	(5)	$Ea \to Fa$	4	$\forall$E	
1,3	(6)	Fa	5,3	$\to$E	
1,3	(7)	$Ea \,\&\, Fa$	3,6	&I	
1,3	(8)	$\exists x\, Fx$	7	$\exists$I	
1,3	(9)	$\Diamond\,\exists x\, Fx$	8	$\Diamond$I	
1	(10)	$\Diamond\,\exists x\, Fx$	2,3,9	$\Diamond$E	[(9),(1) fullt modaliserade]

Eftersom slutsatsen enligt sista raden bara beror av premissen på rad 1, är härledningen klar.

13) Vi skall visa att $\models_I\ p \vee q \ \Rightarrow\ (\models_I\ p$ eller $\models_I\ q)$.
Antag att $(\models_I\ p$ eller $\models_I\ q)$ **inte** gäller, dvs att $\not\models_I\ p$ och $\not\models_I\ q$. Då finns två intuitionistiska tolkningar med mängder $S_1,\ S_2$ av informationstillstånd så att de inte bestyrker p respektive q, dvs $\alpha_1 \not\Vdash p$ och $\alpha_2 \not\Vdash q$.
Bilda en ny tolkning "genom att sätta S_1 och S_2 bredvid varandra över en ny rot α" dvs inför $S = S_1 \cup S_2 \cup \{\alpha\}$ (vi antar att S_1 och S_2 är disjunkta, döp annars om tillstånd) och låt $\leq$ ges av $\leq_1$ i S_1 och av $\leq_2$ i S_2, $\sigma \not\leq \sigma'$ om $\sigma \in S_1$ och $\sigma' \in S_2$ eller tvärtom, medan roten α uppfyller $\alpha \leq \sigma$ för alla $\sigma \in S$. $\sigma \in S_1$ eller $\in S_2$ har samma $warr(\sigma)$ som i de ursprungliga tolkningarna, $warr(\alpha) = \varnothing$. Då gäller $\alpha \not\Vdash p \vee q$, ty $\alpha \not\Vdash p$ och $\alpha \not\Vdash q$, ty $\alpha \leq \alpha_1$ och $\alpha_1 \not\Vdash p$ och motsvarande för q. Således $\not\models_I\ p \vee q$ och påståendet följer.