Institutionen för matematik
KTH
J.Kristoferson, B.Ek

Tentamen i 5B1928, LOGIK för D och IT
Måndagen den 26 maj 2003

Skrivtid: 8.00 – 13.00
Examinatorer: Jan Kristoferson (IT), tel 7907287, och Bengt Ek (D), tel 7906951.
Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
För godkänt krävs 13 poäng på del A. Uppgifterna ger maximalt 2 poäng var. Den som vårterminen 2003 klarat kontrollskrivning nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och skall inte göra dessa uppgifter).
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du klarat.

Del A

1) I en rättegång på Knarrön (där ju var och en antingen är kung (och alltid talar sanning) eller narr (och alltid ljuger)) sade svarandens advokat: ”Min klient är narr och inte skyldig.”
Svaranden sade: ”Min advokat talar alltid sanning.”
Kan det på grund av dessa yttranden avgöras om svaranden är skyldig eller oskyldig, och vilket är han i så fall?

2) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas) att

$$A \vee B,\ \sim(A \vee C)\ \vdash\ \sim(B \rightarrow C).$$

3) Visa att

$$\forall x\, \exists y\, (Px \leftrightarrow Qy)\ \not\models\ \exists y\, \forall x\, (Px \leftrightarrow Qy).$$

4) Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\forall x\, (Px \vee Qx),\ \exists x\, (Px \rightarrow Qx)\ \vdash\ \exists x\, Qx.$$

5) Använd tablåmetoden för att avgöra om

$$\forall x\, (Fx \vee Gx),\ \exists x\, (Fx \,\&\, Gx)\ \models\ \forall x\, (Fx \rightarrow Gx).$$

Om det inte gäller, använd tablån för att finna ett motexempel.

6) Översätt följande till predikatlogiska sentenser:
1. ”Varje hacker känner minst en annan hacker.”
2. ”Det finns precis en (en och endast en) hacker.”

Använd följande lexikon:
Hx : ”Ref(x) är en hacker”, Kxy : ”Ref(x) känner Ref(y)”.

7) Visa med naturlig deduktion:

$$\forall x\, \exists y\, Pxy,\ \sim\forall x\, Pxx\ \vdash\ \sim\forall x\, \forall y\, x = y.$$

SI-reglerna på formelbladet får användas.

Vänd!

8) Är följande slutledning korrekt? Visa det med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas) **eller** finn en tolkning som visar motsatsen.

$$\forall x\,\forall y\,(Rxy \to \sim Ryx),\ \forall x\,\exists y\,Rxy\ \vDash\ \forall y\,\exists x\,Rxy$$

9) Betrakta påståendena α) och β) om sentenserna p, q, r:

$$\alpha)\ \vDash p\ \Rightarrow\ \vDash q \to r \qquad \beta) \vDash p \,\&\, q\ \Rightarrow\ \vDash r$$

α) t.ex. säger alltså att om p är en tautologi är också $q \to r$ en tautologi.
Gäller $\alpha) \Rightarrow \beta)$? Gäller $\beta) \Rightarrow \alpha)$? Motivera ordentligt.

10) Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\, S(S(0)) * x = x + x$.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.
Utan bevis får användas att $\forall x\,\forall y\, S(x) + y = S(x + y)$ följer ur Peanos axiom.

Del B

Denna del ger, om del A är godkänd, betyg fyra för 4-7 poäng och betyg fem för 8-12 poäng. Uppgifterna kan ge 2 poäng var.
Uppgifterna är troligen inte ordnade efter svårighet.
Var noga med att motivera dina svar!

11) Visa i varianten S5 av modallogik (dvs den modallogik som presenteras i kursboken) att

$$A \leftrightarrow B,\ \Box\,(C \to B),\ \Diamond\,(A \,\&\, \sim B)\ \nvDash_{S5}\ \Box\,(C \to (B \to A)).$$

12) Visa med naturlig deduktion i modal predikatlogik (fortfarande variant S5):

$$\Box\,\forall x\, Fx\ \vdash_{S5}\ \Diamond\,\exists x\, Fx.$$

SI-reglerna på formelbladet får användas.

13) Visa att om p och q är sentenser, gäller i intuitionistisk logik

$$\vDash_I\ p \vee q\ \ \Rightarrow\ \ (\vDash_I p \text{ eller } \vDash_I q).$$

Det är tillåtet att begränsa sig till satslogik.

14) Visa att i intuitionistisk logik:

$$\sim\forall x\, Fx\ \nvDash_I\ \exists x\,(Fx \to A).$$

15) Visa att en sentensmängd Γ (i första ordningens predikatlogik) saknar modeller om och endast om det finns $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \Gamma$ så att sentensen $\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_n$ är logiskt giltig (dvs en tautologi).

16) Betrakta det predikatlogiska språket med en tvåställig predikatsymbol $\leq$.
Är följande sentens sann i tolkningen med domän $D = \mathbb{N}$, de naturliga talen $\{0, 1, 2, \ldots\}$ och $\leq$ tolkat som ”mindre än eller lika med”?
$\forall X\,\exists u\,\forall x\,(u(x) \leq x \,\&\, (Xx \to \exists y\,(Xy \,\&\, y = u(y))) \,\&\, \forall y\,((Xx \,\&\, Xy) \to u(x) = u(y)))$

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.