Institutionen för matematik
KTH
Jan Kristoferson

Lösningar tentamen 5B1928 Logik för D1, 19 augusti 2003

1 Antag först att personen är kung. Hans svar på den andra frågan visar då att han någon gång påstått att han inte är varulv. Och eftersom han alltid talar sanning, så är han inte varulv. Antag nu att han i stället är narr. Hans svar på den första frågan visar då att han någon gång påstått att han är varulv. Och eftersom han alltid ljuger, så är han inte varulv i detta fall heller.
Svar: ja, det går att avgöra, personen är inte varulv.
Formellt, om man låter K betyda "Personen är kung"och V betyda "Personen är varulv", så ser man (första frågan) att $\sim K \rightarrow (V \leftrightarrow K)$ är sann och (andra frågan) att $K \rightarrow (\sim V \leftrightarrow K)$ är sann. T.ex. med tabell ser man nu att V måste vara falsk.

2 Vi söker med tablåmetoden ett motexempel, dvs en tolkning som gör $(A \leftrightarrow (B \vee C)) \vee ((A \vee D) \rightarrow (B \vee D))$ falsk.

$$\begin{array}{rlcl}
 & \mathbb{F}: & (A \leftrightarrow (B \vee C)) \vee ((A \vee D) \rightarrow (B \vee D)) & \surd_1 \\
1 & \mathbb{F}: & A \leftrightarrow (B \vee C) & \surd_5 \\
1 & \mathbb{F}: & (A \vee D) \rightarrow (B \vee D) & \surd_2 \\
2 & \mathbb{T}: & A \vee D & \surd_4 \\
2 & \mathbb{F}: & B \vee D & \surd_3 \\
3 & \mathbb{F}: & B & \\
3 & \mathbb{F}: & D &
\end{array}$$

$4\ \mathbb{T}:\ A$	$4\ \mathbb{T}:\ D$ $+$

$5\ \mathbb{T}:\ A$ $5\ \mathbb{F}:\ B \vee C\ \ \surd_6$ $6\ \mathbb{F}:\ B$ $6\ \mathbb{F}:\ C$	$5\ \mathbb{F}:\ A$ $5\ \mathbb{T}:\ B \vee C$ $+$

Tablån sluter sig inte, den öppna vägen ger motexemplet $(A, B, C, D) = (1, 0, 0, 0)$.

3 Vi skall visa att $\exists y \forall x\, (Px \rightarrow Qy) \nvDash \forall y \exists x\, (Px \rightarrow Qy)$.
Påståendet visas av en tolkning som gör den vänstra sentensen sann och den högra falsk.
Högra sentensen falsk $\iff$ $\sim \forall y \exists x\, (Px \rightarrow Qy)$ sann $\iff$ $\exists y \forall x\ \sim (Px \rightarrow Qy)$ sann $\iff$ $\exists y \forall x\, (Px \,\&\, \sim Qy)$ sann $\iff$ $\forall x\, (Px \,\&\, \sim Qb)$ sann för något b $\iff$ Pa sann för alla a och Qb falsk för något b. Vänstra sentensen sann $\iff$ $\forall x\, (Px \rightarrow Qb)$ sann för något b, vilket t.ex. gäller om Qb är sann för något b. Tydligen fungerar tolkningen: $D = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{Ext}(P) = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{Ext}(Q) = \{\alpha\}$.

4 Att visa: $\exists x\, Fx,\ \exists x \sim Fx \ \vdash\ \sim \forall x \forall y\, (Fx \rightarrow Fy)$.
Idé: Antag $\forall x \forall y\, (Fx \rightarrow Fy)$. Antag Fa och $\sim Fb$ för två $\exists$E. Härled $Fa \rightarrow Fb$ och sedan en motsägelse.

1	(1)	$\exists x\, Fx$	premiss		
2	(2)	$\exists x \sim Fx$	premiss		
3	(3)	$\forall x \forall y\, (Fx \rightarrow Fy)$	antagande		
4	(4)	Fa	antagande		
5	(5)	$\sim Fb$	antagande		
3	(6)	$\forall y\, (Fa \rightarrow Fy)$	3	$\forall$E	
3	(7)	$Fa \rightarrow Fb$	6	$\forall$E	
3,4	(8)	Fb	7,4	$\rightarrow$E	
3,4,5	(9)	$\curlywedge$	5,8	$\sim$E	
2,3,4	(10)	$\curlywedge$	2,5,9	$\exists$E	[b inte i (2),(3),(4),(9)]
1,2,3	(11)	$\curlywedge$	1,4,10	$\exists$E	[a inte i (1),(2),(3),(10)]
1,2	(12)	$\sim \forall x \forall y\, (Fx \rightarrow Fy)$	3,11	$\sim$I	

Slutsatsen på rad (12) beror bara av premisserna på rad (1) och (2), så saken är klar.

5 1. ”För varje primtal finns något större primtal”
dvs ”För alla x: om x är primtal finns y så att y är primtal och y är större än x”, så
Svar: $\forall x\,(Px \rightarrow \exists y\,(Py\,\&\,Syx))$
2. ”Det finns ett minsta primtal”
dvs ”Det finns ett primtal x så att alla primtal är större än eller lika med x”
dvs “Det finns något x: x är primtal och för alla y gäller att om y är primtal, så är y större än x eller är y lika med x”, så
Svar: $\exists x\,(Px\,\&\,\forall y\,(Py \rightarrow (Syx \vee y = x)))$
Logiskt ekvivalenta varianter är förstås möjliga.

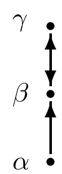
6 Vi skall visa $\models \phi$, där ϕ är $(\exists x\,Px \rightarrow \forall x\,Px) \vee \exists x\,\exists y\;\; x \neq y$. Ta en godtycklig tolkning. Om dess domän har mer än ett element, så är $\exists x\,\exists y\,x \neq y$ sann, varav följer att ϕ är sann. Om domänen bara har ett element a, så är ϕ sann även i detta fall, ty $\exists x\,Px \rightarrow \forall x\,Px$ är då sann, eftersom $\exists x\,Px$ sann $\iff$ $\forall x\,Px$ sann $\iff$ Pa sann. Alltså är ϕ sann i alla tolkningar, och saken är klar.

7 Att visa: $\vdash \phi$, där ϕ är $(\exists x\,Px \rightarrow \forall x\,Px) \vee \exists x\,\exists y\;\; x \neq y$.
Idé: ϕ är en disjunktion, där inget av disjunktionsleden kan härledas var för sig. Standard är då att göra ett indirekt bevis, dvs anta $\sim\phi$. Anta sedan $\exists x\,Px$ för att försöka härleda $\forall x\,Px$. Anta Pa för $\exists$E. Anta nu $a \neq b$. Härledning av andra ledet i ϕ ger en första motsägelse. Vi använder den till att härleda $a = b$, och därpå Pb, som ger $\forall x\,Px$. Nu härleds första ledet i ϕ etc. (SI-regler skulle kunna användas, men ger ingen större vinst här).

1	(1)	$\sim\phi$	antagande		
2	(2)	$\exists x\,Px$	antagande		
3	(3)	Pa	antagande		
4	(4)	$a \neq b$	antagande		
4	(5)	$\exists y\,a \neq y$	4	$\exists$I	
4	(6)	$\exists x\,\exists y\,x \neq y$	5	$\exists$I	
4	(7)	ϕ	6	$\vee$I	
1,4	(8)	$\curlywedge$	1,7	$\sim$E	
1	(9)	$\sim a \neq b$	4,8	$\sim$I	
1	(10)	$a = b$	9	DN	
1,3	(11)	Pb	10,3	=E	
1,3	(12)	$\forall x\,Px$	11	$\forall$I	[b inte i (1),(3)]
1,2	(13)	$\forall x\,Px$	2,3,12	$\exists$E	[a inte i (1),(2),(12)]
1	(14)	$\exists x\,Px \rightarrow \forall x\,Px$	2,13	$\rightarrow$I	
1	(15)	ϕ	14	$\vee$I	
1	(16)	$\curlywedge$	1,15	$\sim$E	
	(17)	$\sim\sim\phi$	1,16	$\sim$I	
	(18)	ϕ	17	DN	

Slutsatsen på rad (18) beror inte på några antaganden, så saken är klar.

8 Vi skall avgöra om
$\forall x\,\forall y\,\forall z\,((Rxy\,\&\,Ryz) \rightarrow \sim Rzx),\ \forall x\,\exists y\,Rxy \models \forall y\,\exists x\,Rxy$.
Premiss 1 säger att det inte finns något sätt att starta i en punkt, följa tre riktade pilar och komma tillbaka till utgångspunkten. Premiss 2 säger att det går minst en pil från varje element. Men härur följer **inte** att det går minst en pil till varje element (den tänkta slutsatsen), se t.ex. fig. Så



Svar: slutledningen är inte korrekt, ett motexempel:
$D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\quad \mathrm{Ext}(R) = \{\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\beta\rangle\}$

Man ser att domänen i ett motexempel måste ha minst tre element. Ett annat motexempel ges av $D = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, R tolkad som ”mindre än”.

9 R är **reflexiv**, ty för varje p gäller Rpp:
$p \vDash r \to p$ och $p \vDash r \to p$, ty p sann $\Rightarrow r \to p$ sann.
R är **symmetrisk**, ty antag Rpq: då gäller både $p \vDash r \to q$ och $q \vDash r \to p$, dvs både $q \vDash r \to p$ och $p \vDash r \to q$, dvs Rqp gäller.
R är **transitiv**: antag Rpq och Rqs.
Då gäller 1) $p \vDash r \to q$, 2) $q \vDash r \to p$, 3) $q \vDash r \to s$ och 4) $s \vDash r \to q$.
Vi ska visa Rps, dvs $p \vDash r \to s$ och $s \vDash r \to p$. Antag att p är sann. Vi ska visa att $r \to s$ är sann. Antag r sann. Med 1) får vi att $r \to q$ är sann, och därmed att q är sann. 3) ger nu att $r \to s$ är sann. Alltså har vi visat $p \vDash r \to s$, och $s \vDash r \to p$ visas på samma sätt med hjälp av 4) och 2). R är alltså reflexiv, symmetrisk och transitiv, och därmed per definition en ekvivalensrelation.

Alternativt kan man först visa att $Rpq \iff p \,\&\, r$ är logiskt ekvivalent med $q \,\&\, r$.

Svar: R är en ekvivalensrelation.

10 Låt ϕy vara formeln $a + y = y \to a = 0$. Det räcker att visa att $\forall y\, \phi y$ följer av Peanos axiom för godtyckligt a.
$\phi 0$, dvs $a + 0 = 0 \to a = 0$, följer direkt av axiom P3.
Antag att ϕb, dvs $a + b = b \to a = 0$, gäller. Visa $\phi S(b)$, dvs $a + S(b) = S(b) \to a = 0$.
Vi får $a + S(b) = S(b) \overset{\text{P4}}{\Rightarrow} S(a + b) = S(b) \overset{\text{P1}}{\Rightarrow} a + b = b \overset{\phi b}{\Rightarrow} a = 0$.
Därmed har vi visat $\phi 0 \,\&\, \forall y\, (\phi y \to \phi S(y))$, och får det önskade $\forall y\, \phi y$ med hjälp av induktionsaxiomet P7.

11 Vi skall visa att $\Box A \to \Diamond B \vdash_{S5} \Diamond(A \to B)$.
Idé: Slutsatsen är falsk $\iff$ A är sann i alla världar och B falsk i alla världar. Två fall finns. 1) A är falsk i någon värld. Då fås slutsatsen eftersom $A \to B$ följer av $\sim A$.
2) A är sann i alla världar. Då fås $\Diamond B$ med hjälp av premissen, och då kan återigen slutsatsen härledas, eftersom $A \to B$ följer av B. Upplagt för indirekt bevis (jämför uppgift 7). Anta alltså $\sim \Diamond(A \to B)$. Anta sedan $\sim A$ och fortsätt enligt resonemanget ovan.

1	(1)	$\Box A \to \Diamond B$	premiss		
2	(2)	$\sim \Diamond(A \to B)$	antagande		
3	(3)	$\sim A$	antagande		
3	(4)	$A \to B$	3	SI (PMI)	
3	(5)	$\Diamond(A \to B)$	4	$\Diamond$I	
2,3	(6)	$\curlywedge$	2,5	$\sim$E	
2	(7)	$\sim\sim A$	3,6	$\sim$I	
2	(8)	A	7	DN	
2	(9)	$\Box A$	8	$\Box$I	[(2) fullt modaliserad]
1,2	(10)	$\Diamond B$	1,9	$\to$E	
11	(11)	B	antagande		
11	(12)	$A \to B$	11	SI (PMI)	
11	(13)	$\Diamond(A \to B)$	12	$\Diamond$I	
1,2	(14)	$\Diamond(A \to B)$	10,11,13	$\Diamond$E	[(13) fullt modaliserad]
1,2	(15)	$\curlywedge$	2,14	$\sim$E	
1	(16)	$\sim\sim \Diamond(A \to B)$	2,15	$\sim$I	
1	(17)	$\Diamond(A \to B)$	16	DN	

Eftersom slutsatsen på rad 17 bara beror av premissen på rad 1, är härledningen klar.

12 Vi skall visa att $\exists x\, \Box\, (Fx \to \Diamond Gx) \nvDash_{S5} \Diamond \exists x\, (Fx \to Gx)$.
Slutsatsen är falsk $\iff$ inte i någon värld existerar något objekt a, sådant att $Fa \to Ga$ är sann där $\iff$ i varje värld gäller att om a existerar där, så är där Fa sann och Ga falsk. För att få premissen sann när slutsatsen är falsk låter vi ett objekt a existera i den aktuella världen, sådant att Ga är sant i någon annan värld.

En tolkning som visar påståendet ges alltså t.ex. av:
$\mathcal{W} = \{w^*, u\}$, $w^*(D) = \{\alpha\}$, $u(D) = \varnothing$,
$w^*[F] = \{\alpha\}$, $u[F] = \varnothing$, $w^*[G] = \varnothing$, $u[G] = \{\alpha\}$.

13 Vi ger tre olika lösningar.

I) Observera att för godtycklig sentens p gäller: $\sim\sim p$ är bestyrkt i en tolkning $\mathcal{K}$ $\iff$ $\sim p$ är inte bestyrkt vid någon nod i $\mathcal{K}$ $\iff$ för varje nod σ i $\mathcal{K}$ finns någon nod $\tau \geq \sigma$ i $\mathcal{K}$ där p är bestyrkt. Låt nu $\mathcal{K}$ vara en godtycklig tolkning vari premissen är bestyrkt. Då är $\sim\sim A$ och $\sim\sim B$ bestyrkta i $\mathcal{K}$. Tag en godtycklig nod σ i $\mathcal{K}$. Då finns $\tau \geq \sigma$ där A är bestyrkt, och då finns $\tau' \geq \tau$ där B är bestyrkt. Men då är både A och B bestyrkta vid τ', följaktigen även $A \,\&\, B$. Enligt det inledande resonemanget följer att slutsatsen $\sim\sim(A \,\&\, B)$ är bestyrkt i $\mathcal{K}$, och vi finner alltså

Svar: ja, slutledningen gäller i intuitionistisk logik.

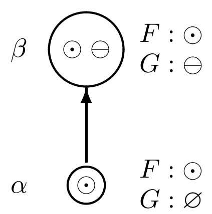
II) Vi gör en härledning i naturlig deduktion utan DN-regeln.

1	(1)	$\sim\sim A \,\&\!\sim\sim B$	premiss	
1	(2)	$\sim\sim A$	1	&E
1	(3)	$\sim\sim B$	1	&E
4	(4)	$\sim(A \,\&\, B)$	antagande	
5	(5)	A	antagande	
6	(6)	B	antagande	
5,6	(7)	$A \,\&\, B$	5,6	&I
4,5,6	(8)	$\curlywedge$	4,7	$\sim$E
4,6	(9)	$\sim A$	5,8	$\sim$I
1,4,6	(10)	$\curlywedge$	2,9	$\sim$E
1,4	(11)	$\sim B$	6,10	$\sim$I
1,4	(12)	$\curlywedge$	3,11	$\sim$E
1	(13)	$\sim\sim(A \,\&\, B)$	4,12	$\sim$I

Slutsatsen på rad (13) beror bara av premissen på rad (1), så saken är klar.

III) På sid. 341 i läroboken kan man inhämta att
$p_1, p_2, \ldots, p_n \Vdash_C q \iff \sim\sim p_1, \sim\sim p_2, \ldots, \sim\sim p_n \Vdash_I \sim\sim q$. $A, B \Vdash_C A \,\&\, B$ gäller ju, så vi får $\sim\sim A, \sim\sim B \Vdash_I \sim\sim(A \,\&\, B)$, varur det önskade lätt följer.

14 Vi skall visa att $\forall x\,(Fx \vee Gx) \nVdash_I \forall x\,Fx \vee \exists x\,Gx$ genom att finna en tolkning som bestyrker $\forall x\,(Fx \vee Gx)$, dvs sådan att för varje nod σ antingen Fa eller Ga bestyrks för varje a i $dom(\sigma)$, men inte bestyrker $\forall x\,Fx \vee \exists x\,Gx$, dvs varken bestyrker $\forall x\,Fx$ eller $\exists x\,Gx$ i roten α, dvs att det finns någon nod β, där Fa inte bestyrks för varje a i $dom(\beta)$, och Ga inte bestyrks för något element a i $dom(\alpha)$. Detta uppfylls av tolkningen
$S = \{\alpha, \beta\}$, $\leqslant = \{\langle\alpha, \beta\rangle\}$,
$\text{dom}(\alpha) = \{\odot\}$, $\text{warr}(\alpha) = \{\langle\text{‘}F\text{’}, \odot\rangle\}$,
$\text{dom}(\beta) = \{\odot, \ominus\}$, $\text{warr}(\beta) = \{\langle\text{‘}F\text{’}, \odot\rangle, \langle\text{‘}G\text{’}, \ominus\rangle\}$.



15 Att $\Gamma \cup \{q\}$ saknar modeller medför enligt kompakthetssatsen att det finns $p_1, p_2, \ldots, p_n$ i Γ så att $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, q\}$ saknar modeller. Men detta är liktydigt med att q är falsk i varje tolkning där $p_1, p_2, \ldots, p_n$ alla är sanna, dvs där $p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, \ldots \,\&\, p_n$ är sann. Det följer att $p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, \ldots \,\&\, p_n \vDash \sim q$ gäller. Därmed är saken klar.

16 Här har endast valet av domän betydelse. Den givna sentensen ϕ:
$\forall X((\exists x\,Xx \,\&\, \exists x \sim Xx) \to \exists u \forall x \forall y\,((x \neq y \to u(x) \neq u(y)) \,\&\, (Xu(x) \leftrightarrow \sim Xx)))$
är sann i en tolkning med domän D $\iff$ för varje predikat F som uppfyller $\exists x\,Fx \,\&\, \exists x \sim Fx$ gäller att det finns en injektiv funktion $f : D \to D$ som uppfyller:
f avbildar varje element i $\text{Ext}(F)$ på ett element utanför $\text{Ext}(F)$ och vice versa ... ($\bigstar$)

- Om D har ett enda element blir $\exists x\,Fx \,\&\, \exists x \sim Fx$ falsk för varje val av F, varför ϕ blir sann i detta fall.
- Om D har två element, säg $D = \{\alpha, \beta\}$, så är $\exists x\,Fx \,\&\, \exists x \sim Fx$ sann $\iff$ $\text{Ext}(F) = \{\alpha\}$ eller $= \{\beta\}$. I båda fallen uppfyller injektionen f given av $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha$ villkoret ($\bigstar$), varför ϕ är sann om D har två element.
- Om $D = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ har fler än två element, betrakta t.ex. F med $\text{Ext}(F) = \{\alpha\}$. Då blir $\exists x\,Fx \,\&\, \exists x \sim Fx$ sann, men någon injektion f som uppfyller ($\bigstar$) kan uppenbarligen inte finnas. Alltså blir ϕ falsk i detta fall.

Svar: sentensen är satisfierbar. Den är sann i en tolkning $\iff$ domänen har högst två element.