Institutionen för matematik
KTH
B.Ek, J.Kristoferson

Tentamen i 5B1928, LOGIK för D och IT
Tisdagen den 19 augusti 2003

Skrivtid: 14.00 – 19.00 **Examinatorer:** Bengt Ek (D), tel 7906951 och Jan Kristoferson (IT), tel 7907287.
Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
För godkänt krävs 13 poäng på del A. Uppgifterna ger maximalt 2 poäng var. Den som vårterminen 2003 klarat kontrollskrivning nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och skall inte göra dessa uppgifter).
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du klarat.

Del A

1 Vid ett besök på Knarrön (där ju var och en antingen är kung och alltid talar sanning, eller narr och alltid ljuger), möter du en person och frågar "Har du någonsin påstått att du är varulv?". Du får svaret "Nej" och frågar sedan "Har du någonsin påstått att du inte är varulv?". Nu får du svaret "Ja". Kan det på grundval av denna konversation avgöras om du mött en varulv eller inte, och i så fall vilket?

2 Använd tablåmetoden för att avgöra om sentensen

$$(A \leftrightarrow (B \vee C)) \vee ((A \vee D) \rightarrow (B \vee D))$$

är logiskt giltig eller ej. Om så inte är fallet, använd tablån för att finna ett motexempel.

3 Visa att

$$\exists y\, \forall x\, (Px \rightarrow Qy) \not\models \forall y\, \exists x\, (Px \rightarrow Qy).$$

4 Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\exists x\, Fx,\ \exists x \sim Fx \ \vdash\ \sim \forall x\, \forall y\, (Fx \rightarrow Fy)$$

5 Översätt följande till predikatlogiska sentenser:
1. "För varje primtal finns något större primtal."
2. "Det finns ett minsta primtal."
Antag att domänen består av de naturliga talen och använd följande lexikon:
Px : "Ref(x) är ett primtal", Sxy : "Ref(x) är större än Ref(y)".

6 Visa med semantiska resonemang att sentensen

$$(\exists x\, Px \rightarrow \forall x\, Px) \vee \exists x\, \exists y\ x \neq y.$$

är logiskt giltig.

Vänd!

7 Visa resultatet i uppgift 6 med användning av naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna).

8 Är följande slutledning korrekt? Visa det med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas) **eller** finn en tolkning som visar motsatsen.

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, ((Rxy \,\&\, Ryz) \to \, \sim Rzx), \; \forall x \, \exists y \, Rxy \;\vDash\; \forall y \, \exists x \, Rxy$$

9 Låt r vara en logisk sentens. Definiera en binär relation R på mängden av alla sentenser (i ett givet språk) enligt:

Rpq betyder att både $p \vDash r \to q$ och $q \vDash r \to p$ gäller.

Avgör om R är en ekvivalensrelation. Det skall tydligt framgå vad det innebär att R är en ekvivalensrelation.

10 Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x \, \forall y \, (x + y = y \to x = 0)$. Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande. Ledning: visa $\forall y \, (a + y = y \to a = 0)$ för godtyckligt a.

Del B

Denna del ger, om del A är godkänd, betyg fyra för 4-7 poäng och betyg fem för 8-12 poäng. Uppgifterna, som kan ge 2 poäng var, är troligen inte ordnade efter svårighetsgrad.

Var noga med att motivera dina svar!

11 Visa i varianten S5 av modallogik (dvs den modallogik som presenteras i kursboken) att

$$\Box A \to \Diamond B \;\vdash_{S5}\; \Diamond (A \to B).$$

SI-reglerna på formelbladet får användas.

12 Visa i modal predikatlogik (fortfarande variant S5):

$$\exists x \, \Box \, (Fx \to \Diamond \, Gx) \;\nvDash_{S5}\; \Diamond \, \exists x \, (Fx \to Gx).$$

13 Gäller

$$\sim\sim A \,\&\, \sim\sim B \;\vDash_I\; \sim\sim (A \,\&\, B)$$

i intuitionistisk logik?

14 Gäller

$$\forall x \, (Fx \lor Gx) \;\vDash_I\; \forall x \, Fx \lor \exists x \, Gx$$

i intuitionistisk logik?

15 Visa att om (den eventuellt oändliga) sentensmängden $\Gamma \cup \{q\}$ i första ordningens predikatlogik saknar modeller, så finns det $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \Gamma$ så att $p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, \ldots \,\&\, p_n \vDash \sim q$.

16 Är följande sentens i andra ordningens predikatlogik satisfierbar?

$$\forall X ((\exists x \, Xx \,\&\, \exists x \sim Xx) \to \exists u \forall x \, \forall y \, ((x \neq y \to u(x) \neq u(y)) \,\&\, (Xu(x) \leftrightarrow \sim Xx)))$$

Beskriv i så fall alla tolkningar som satisfierar den.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.