Institutionen för matematik
KTH
J.Kristoferson, B.Ek

Lösningar tentamen 5B1928 Logik för D1 och IT2, 24 maj 2004

1) Vi har påståendena:
A: "Det finns högst en narr i vår by."
B: "Det finns minst en narr i byn."
C: "Vi tre är de enda som bor i Knirke."
Om B är narr är det han säger sant. Omöjligt, så **B är kung** och det finns minst en narr i Knirke. Om C är kung, är A, B och C de enda invånarna, så A måste vara narren. Det hon säger skulle vara osant, dvs det skulle finnas minst två narrar bland dem. Det stämmer inte (B och C kungar, ju), så
Svar: Ja, man kan avgöra vad C är. Hon är narr.
(Och om A är kung finns det bara kungar, minst en, utöver A, B och C i Knirke. Om A är narr vet vi bara att det bor fler i byn.)

2) Att visa: $\sim A \vee B,\ \sim(B\,\&\,C)\ \vdash\ C \to \sim A$.
Idé: Om vi antar C och A får vi motsägelse (den första premissen ger $A \to B$, så vi får B och så $B\,\&\,C$, så $\curlywedge$), så C ger $\sim A$.

1	(1)	$\sim A \vee B$	premiss	
2	(2)	$\sim(B\,\&\,C)$	premiss	
3	(3)	C	antagande	
4	(4)	A	antagande	
1	(5)	$A \to B$	1	SI(Imp)
1,4	(6)	B	5,4	$\to$E
1,3,4	(7)	$B\,\&\,C$	6,3	& I
1,2,3,4	(8)	$\curlywedge$	2,7	~E
1,2,3	(9)	$\sim A$	4,8	~I
1,2	(10)	$C \to \sim A$	3,9	$\to$I

Slutsatsen på rad (10) beror bara av premisserna på raderna (1) och (2), så **härledningen är klar**.

3) Att visa: $\forall x\,(Fx \to Gx),\ \exists x\,Fx\ \vdash\ \exists x\,(Fx \leftrightarrow Gx)$.
Idé: Fa gäller för något a, enligt andra premissen. Enligt första premissen gäller $Fa \to Ga$, så också Ga. Alltså gäller $Fa \leftrightarrow Ga$.

1	(1)	$\forall x\,(Fx \to Gx)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\,Fx$	premiss		
3	(3)	Fa	antagande		
1	(4)	$Fa \to Ga$	1	$\forall$E	
1,3	(5)	Ga	4,3	$\to$E	
6	(6)	Ga	antagande		
1,3	(7)	$Fa \leftrightarrow Ga$	3,5,6,3	$\leftrightarrow$I	
1,3	(8)	$\exists x\,(Fx \leftrightarrow Gx)$	7	$\exists$I	
1,2	(9)	$\exists x\,(Fx \leftrightarrow Gx)$	2,3,8	$\exists$E	[a inte i (2),(8),(1)]

Slutsatsen på rad (9) beror bara av premisserna på raderna (1) och (2), så **saken är klar**.

I det här fallet går det lika enkelt med *Df*-regeln:

1	(1)	$\forall x\,(Fx \to Gx)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\,Fx$	premiss		
3	(3)	Fa	antagande		
1	(4)	$Fa \to Ga$	1	$\forall$E	
3	(5)	$Ga \to Fa$	3	SI(PMI$_1$)	
1,3	(6)	$(Fa \to Ga)\,\&\,(Ga \to Fa)$	4,5	&I	
1,3	(7)	$Fa \leftrightarrow Ga$	6	*Df*	
1,3	(8)	$\exists x\,(Fx \leftrightarrow Gx)$	7	$\exists$I	
1,2	(9)	$\exists x\,(Fx \leftrightarrow Gx)$	2,3,8	$\exists$E	[a inte i (2),(8),(1)]

4) Vi skall visa att $\forall x\,(Fx \to Gx),\ \exists x\,Fx \not\models \forall x\,(Fx \leftrightarrow Gx)$.
Påståendet visas av en tolkning som gör de vänstra sentenserna sanna och den högra falsk. För att $\forall x\,(Fx \to Gx)$ skall vara sann och $\forall x\,(Fx \leftrightarrow Gx)$ falsk, skall för alla element σ $Fs \to Gs$ vara sann, men för något element, α säg, $Fa \leftrightarrow Ga$ vara falsk. Så Fa måste vara falsk och Ga sann. För att också få $\exists x\,Fx$ sann krävs ett element till, β säg, med Fb sann. Då måste också Gb vara sann.
(I resonemanget använder vi den vanliga konventionen om namn, att $\mathrm{Ref}(a) = \alpha$ etc.)
Tydligen fungerar tolkningen:
$D = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{Ext}(F) = \{\beta\}$, $\mathrm{Ext}(G) = \{\alpha, \beta\}$, ty då är
$\forall x\,(Fx \to Gx)$ **sann**,
ty $Fa \to Ga$ och $Fb \to Gb$ båda sanna, ty Ga och Gb sanna (ty $\alpha, \beta \in \mathrm{Ext}(G)$).
$\exists x\,Fx$ **sann**, ty Fb sann (ty $\beta \in \mathrm{Ext}(F)$).
$\forall x\,(Fx \leftrightarrow Gx)$ **falsk**,
ty $Fa \leftrightarrow Ga$ falsk, ty Fa falsk (ty $\alpha \notin \mathrm{Ext}(F)$) och Ga sann (ty $\alpha \in \mathrm{Ext}(G)$).
Saken är klar.

5) A sade: ”Det finns högst en narr i vår by”,
dvs ”För alla x och alla y, om båda är narrar är $x = y$” (domänen består ju av byinvånarna)
så A påstår $\forall x\,\forall y\,((\sim Kx \,\&\, \sim Ky) \to x = y)$ (ekvivalent: $\forall x\,\forall y\,((Kx \vee Ky) \vee x = y)$).
Detta är sant precis om A är kung, så $Ka \leftrightarrow \forall x\,\forall y\,((\sim Kx \,\&\, \sim Ky) \to x = y)$ är sann.
C sade: ”Vi tre är de enda som bor i Knirke”,
dvs ”Alla i Knirke är antingen A, B eller C”,
så C påstår $\forall x\,(x = a \vee (x = b \vee x = c))$ (inre parenteserna kan strykas).
Detta är sant precis om C är kung, så $Kc \leftrightarrow \forall x\,(x = a \vee (x = b \vee x = c))$ är sann.
Svaret: $Ka \leftrightarrow \forall x\,\forall y\,((\sim Kx \,\&\, \sim Ky) \to x = y)$ **och** $Kc \leftrightarrow \forall x\,(x = a \vee (x = b \vee x = c))$ **är sanna**. Logiskt ekvivalenta varianter är förstås möjliga.

6) För att avgöra om
$\forall x\,\forall y\,(Px \to Py) \models \forall x\,Px \vee \sim\exists x\,Px$
söker vi motexempel (tolkningar som gör premissen sann och slutsatsen falsk):

I tablån växlar de tre faserna så:
1. Satslogiska 1,2; 11–13
2. $\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$ 3,4
3. $\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$ 5–10

Tablån sluter sig, så **slutledningen är giltig**.

$$
\begin{array}{rlcl}
 & \mathbb{T}: & \forall x\,\forall y\,(Px \to Py) & a_5, b_6 \\
 & \mathbb{F}: & \forall x\,Px \vee \sim\exists x\,Px & \surd_1 \\
1 & \mathbb{F}: & \forall x\,Px & \surd_{3:a} \\
1 & \mathbb{F}: & \sim\exists x\,Px & \surd_2 \\
2 & \mathbb{T}: & \exists x\,Px & \surd_{4:b} \\
3 & \mathbb{F}: & Pa & \\
4 & \mathbb{T}: & Pb & \\
5 & \mathbb{T}: & \forall y\,(Pa \to Py) & a_7, b_8 \\
6 & \mathbb{T}: & \forall y\,(Pb \to Py) & a_9, b_{10} \\
7 & \mathbb{T}: & Pa \to Pa & \surd_{11} \\
8 & \mathbb{T}: & Pa \to Pb & \surd_{12} \\
9 & \mathbb{T}: & Pb \to Pa & \surd_{13} \\
10 & \mathbb{T}: & Pb \to Pb &
\end{array}
$$

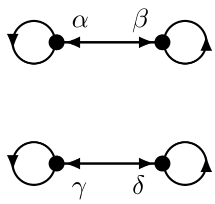
$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{3}{c}{11\ \mathbb{F}: Pa} & 11\ \mathbb{T}: Pa \\
 & & & \times \\
\multicolumn{2}{c}{12\ \mathbb{F}: Pa} & \multicolumn{2}{c}{12\ \mathbb{T}: Pb} \\
13\ \mathbb{F}: Pb & 13\ \mathbb{T}: Pa & 13\ \mathbb{F}: Pb & 13\ \mathbb{T}: Pa \\
\times & \times & \times & \times
\end{array}
$$

7) Att visa: $\forall x\, \exists y\, Rxy,\ \forall x\, \exists y \sim Ryx\ \vdash\ \exists x\, \exists y\, x \neq y$.
Idé: Enligt första premissen finns för alla a ett b så att Rab gäller. Enligt den andra premissen finns (speciellt) för detta b ett c så att $\sim Rcb$ gäller. Då kan inte $a = c$ gälla.

1	(1)	$\forall x\, \exists y\, Rxy$	premiss		
2	(2)	$\forall x\, \exists y \sim Ryx$	premiss		
1	(3)	$\exists y\, Ray$	1	$\forall$E	
4	(4)	Rab	antagande		
2	(5)	$\exists y \sim Ryb$	2	$\forall$E	
6	(6)	$\sim Rcb$	antagande		
7	(7)	$a = c$	antagande		
4,7	(8)	Rcb	7,4	=E	
4,6,7	(9)	$\curlywedge$	6,8	$\sim$E	
4,6	(10)	$a \neq c$	7,9	$\sim$I	
4,6	(11)	$\exists y\, a \neq y$	10	$\exists$I	
4,6	(12)	$\exists x\, \exists y\, x \neq y$	11	$\exists$I	
2,4	(13)	$\exists x\, \exists y\, x \neq y$	5,6,12	$\exists$E	[c inte i (5),(12),(4)]
1,2	(14)	$\exists x\, \exists y\, x \neq y$	3,4,13	$\exists$E	[b inte i (3),(13),(2)]

Slutsatsen på rad (14) beror bara av premisserna på raderna (1) och (2), så **saken är klar**.

8) Vi skall visa att
$\forall x\, \forall y\, (Rxy \to Ryx),\ \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy\ \&\ Ryz) \to Rxz),\ \forall x\, \exists y\, (x \neq y\ \&\ Rxy)\ \nvDash\ \forall x\, \forall y\, Rxy$.



Vi söker alltså en tolkning som gör premisserna sanna och den tänkta slutsatsen falsk. Domänen måste innehålla minst ett element, α säg. Enligt premiss 3 finns ett element till, vi kallar det β, med Rab sann. Enligt premiss 1 (symmetri) är då också Rba sann. Transitiviteten (premiss 2) ger så Raa och Rbb. Med $D = \{\alpha, \beta\}$ blir HL sant, det behövs fler element. Lägg till γ. Enligt premiss 3 gäller Rcd med $c \neq d$ för något d. Man ser att om $d = a$ eller $d = b$ blir HL sant igen, men om vi inför ännu ett element, δ, får vi **det önskade motexemplet**, se fig.:
$D = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $\quad \mathrm{Ext}(R) = \{\langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \beta, \beta \rangle, \langle \gamma, \gamma \rangle, \langle \delta, \delta \rangle, \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle, \langle \gamma, \delta \rangle, \langle \delta, \gamma \rangle\}$
En **annan möjlighet** är att ta $D = \mathbb{Z}$, heltalen, och låta Rab vara sann precis om skillnaden $\alpha - \beta$ är ett jämnt tal.
Premisserna betyder precis att R(:s tolkning) är en ekvivalensrelation med minst två element i varje ekvivalensklass.

9) Vi har: $\mathcal{S}\phi\psi$ är sann precis om $\ \vDash \exists x\, (\phi x \leftrightarrow \psi x)$.
Att $\mathcal{S}$ är **reflexiv** betyder att $\mathcal{S}\phi\phi$ är sann för alla ϕ. Eftersom $\phi a \leftrightarrow \phi a$ är sann oberoende av ϕa och a är $\exists x\, (\phi x \leftrightarrow \phi x)$ sann i varje tolkning, så $\mathcal{S}\phi\phi$ sann.
Att $\mathcal{S}$ är **symmetrisk** betyder att $\mathcal{S}\phi\psi \Rightarrow \mathcal{S}\psi\phi$ för alla ϕ, ψ. Om $\mathcal{S}\phi\psi$ är sann finns i varje tolkning ett a så att $\phi a \leftrightarrow \psi a$, vilket medför $\psi a \leftrightarrow \phi a$, så $\exists x\, (\psi x \leftrightarrow \phi x)$ sann i varje tolkning, så $\mathcal{S}\psi\phi$ sann.
Att $\mathcal{S}$ är **transitiv** betyder att $(\mathcal{S}\phi\psi$ och $\mathcal{S}\psi\chi) \Rightarrow \mathcal{S}\phi\chi$ för alla ϕ, ψ, χ. Men om ϕ är $x = a$, ψ är $x = a \vee x = b$ och χ är $x = b$, är $\mathcal{S}\phi\psi$ och $\mathcal{S}\psi\chi$ sanna (ty $a = a \leftrightarrow (a = a \vee a = b)$ och $(b = a \vee b = b) \leftrightarrow b = b$ är sanna i alla tolkningar), men $\mathcal{S}\phi\chi$ är falsk (om $D = \{\alpha, \beta\}, \mathrm{Ref}(a) = \alpha, \mathrm{Ref}(b) = \beta$ är $\exists x\, (x = a \leftrightarrow x = b)$ falsk).
Så **svar: $\mathcal{S}$ är reflexiv och symmetrisk, men inte transitiv**.

10) Låt ϕx vara formeln $0 * x = 0$. Vi skall visa $\forall x\, \phi x$.
Man får $0 * 0 \overset{\mathrm{P5}}{=} 0$, dvs $\phi 0$.
Antag att ϕa gäller, dvs $0 * a = 0$.
Då fås $0 * S(a) \overset{\mathrm{P6}}{=} (0 * a) + 0 \overset{\mathrm{P3}}{=} 0 * a \overset{\phi a}{=} 0$, dvs $\phi S(a)$.
För godtyckligt a gäller alltså $\phi a \to \phi S(a)$ och därmed $\forall x\, (\phi x \to \phi S(x))$.
Så $\phi 0\ \&\ \forall x\, (\phi x \to \phi S(x))$ gäller och enligt axiom P7 (med $n = 0$) $\forall x\, \phi x$. **Saken är klar.**
Trots att resultatet är så enkelt **måste** induktionsaxiomet användas, se Ö Q1 i materialet K1!

11) Vi skall visa att $\sim\Box A \vdash_{S5} \Diamond(A \to B)$.

Idé: Enligt premissen finns en värld där $\sim A$ gäller, så också $A \to B$ i den världen. **Men** eftersom vi inte kan veta i vilken värld det sker, kan vi inte härleda $\sim A$ från premissen (det skulle innebära att den gällde i alla världar), vi får göra ett indirekt bevis, anta motsatsen och visa A i alla världar.

1	(1)	$\sim\Box A$	premiss		
2	(2)	$\sim\Diamond(A \to B)$	antagande		
3	(3)	$\sim A$	antagande		
3	(4)	$A \to B$	3	SI(PMI$_2$)	
3	(5)	$\Diamond(A \to B)$	4	$\Diamond$I	
2,3	(6)	$\curlywedge$	2,5	$\sim$E	
2	(7)	$\sim\sim A$	3,6	$\sim$I	
2	(8)	A	7	DN	
2	(9)	$\Box A$	8	$\Box$I	[(2) fullt modaliserad]
1,2	(10)	$\curlywedge$	1,9	$\sim$E	
1	(11)	$\sim\sim\Diamond(A \to B)$	2,10	$\sim$I	
1	(12)	$\Diamond(A \to B)$	11	DN	

Eftersom slutsatsen på sista raden bara beror av premissen på rad (1), är **härledningen klar**.

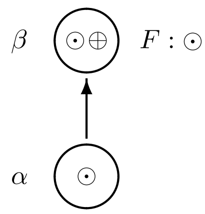
12) Vi skall visa att $\exists x\, Qx,\ \exists x \Box Px,\ \Diamond(\forall x \sim Qx \,\&\, \exists x\, x = x) \nvDash_{S5} \Box\exists x\,(Qx \to Px)$.
Vi söker alltså en tolkning som gör premisserna sanna och den högra sentensen falsk.
Att den högra sentensen är falsk betyder att det finns en värld, u säg, där $\exists x\,(Qx \to Px)$ är falsk. Det är uppfyllt om $u(D) = \varnothing$, vi prövar det. Enligt premiss 1 finns i w^* ett element, α säg, som gör Qa sann i w^*. Enligt premiss 2 finns ett element i w^* som gör P sann i alla världar. Vi prövar med α igen. Premiss 3 ger att det finns en värld med $\forall x \sim Qx$ sann och icke-tom domän. Denna värld kan inte vara w^* (som har Q sann för ett existerande element) eller u (där $\exists x\,(Qx \to Px)$ är falsk). Kalla den v. Vi leds till tolkningen:
$\mathcal{W} = \{w^*, u, v\},\ D = \{\alpha\},\quad w^*(D) = v(D) = \{\alpha\},\ u(D) = \varnothing,$
$w^*[Q] = \{\alpha\},\ u[Q] = v[Q] = \varnothing,\quad w^*[P] = u[P] = v[P] = \{\alpha\}.$
Den visar påståendet, ty i den gäller att

- $\exists x\, Qx$ är **sann**, ty $w^*[\exists x\, Qx] = 1$, ty $w^*[Qa] = 1$ (och $\alpha \in w^*(D)$), ty $\alpha \in w^*[Q]$
- $\exists x \Box Px$ är **sann**, ty $w^*[\exists x \Box Px] = 1$, ty ($\alpha \in w^*(D)$ och) $w^*[\Box Pa] = 1$, ty $w^*[Pa] = u[Pa] = v[Pa] = 1$, ty $\alpha \in w^*[P], u[P], v[P]$
- $\Diamond(\forall x \sim Qx \,\&\, \exists x\, x = x)$ är **sann**, ty $w^*[\Diamond(\forall x \sim Qx \,\&\, \exists x\, x = x)] = 1$, ty $v[\forall x \sim Qx \,\&\, \exists x\, x = x] = 1$, ty $v[\forall x \sim Qx] = 1$ (ty $v(D) = \{\alpha\}$ och $\alpha \notin v[Q]$) och $v[\exists x\, x = x] = 1$ (ty $\alpha \in v(D)$ och $v[a = a] = 1$)
- $\Box\exists x\,(Qx \to Px)$ är **falsk**, ty $w^*[\Box\exists x\,(Qx \to Px)] = 0$, ty $u[\exists x\,(Qx \to Px)] = 0$, ty $u(D) = \varnothing$

Så **vi har visat att** $\exists x\, Qx,\ \exists x \Box Px,\ \Diamond(\forall x \sim Qx \,\&\, \exists x\, x = x) \nvDash_{S5} \Box\exists x\,(Qx \to Px)$.

13) Vi skall visa att $A \to (B \to C),\ \sim(A \to C) \vDash_I \sim B$.
Låt som vanligt S vara mängden av informationstillstånd, med rot α och ordning $\leq$, i en intuitionistisk tolkning.
Antag att $\alpha \Vdash A \to (B \to C)$ och $\alpha \Vdash \sim(A \to C)$. Vi har att visa att $\alpha \Vdash \sim B$.
Antag (för att få motsägelse) att $\alpha \nVdash \sim B$, dvs det finns ett $\sigma \in S$ med $\sigma \Vdash B$. Eftersom $\alpha \Vdash \sim(A \to C)$, gäller $\sigma \nVdash A \to C$, så det finns $\tau \in S$ med $\sigma \leq \tau$ och $\tau \Vdash A$, $\tau \nVdash C$. Men eftersom $\alpha \Vdash A \to (B \to C)$ gäller då $\tau \Vdash B \to C$ och eftersom $\sigma \leq \tau$, $\sigma \Vdash B$ gäller $\tau \Vdash B$. Det följer att $\tau \Vdash C$, motsägelse. Antagandet $\sigma \Vdash B$ gav motsägelse, så $\alpha \Vdash \sim B$,
dvs vi har visat $A \to (B \to C),\ \sim(A \to C) \vDash_I \sim B$, **saken är klar**.

14) Vi skall visa att $\forall x\, Fx \rightarrow \exists x\, Gx \;\; \nVdash_I \;\; \exists x\,(Fx \rightarrow Gx)$ genom att finna en tolkning $\mathcal{K}$ som bestyrker $\forall x\, Fx \rightarrow \exists x\, Gx$ (dvs sådan att $\sigma \Vdash \forall x\, Fx \;\; \Rightarrow \;\; \sigma \Vdash \exists x\, Gx$ för alla $\sigma \in S$) och inte bestyrker $\exists x\,(Fx \rightarrow Gx)$ (dvs för alla $\circledcirc \in dom(\alpha)$ gäller $\alpha \nVdash F\circledcirc \rightarrow G\circledcirc$).



Det räcker tydligen att $dom(\alpha) = \{\odot\}$ och $\sigma \Vdash F\odot$, $\sigma \nVdash G\odot$ för något $\sigma \in S$ och att $\tau \nVdash \forall x\, Fx$ för alla $\tau \in S$.
Betrakta tolkningen (se fig.) $S = \{\alpha, \beta\}$, $\leqslant = \{\langle \alpha, \beta \rangle\}$,
$dom(\alpha) = \{\odot\}$, $dom(\beta) = \{\odot, \oplus\}$,
$warr(\alpha) = \varnothing$, $warr(\beta) = \{\langle \text{'}F\text{'}, \odot \rangle\}$.
Den ger:

- $\alpha \Vdash \forall x\, Fx \rightarrow \exists x\, Gx$, ty $\alpha, \beta \nVdash \forall x\, Fx$, ty $\beta \nVdash F\oplus$ och $\oplus \in dom(\beta)$
- $\alpha \nVdash \exists x\,(Fx \rightarrow Gx)$, ty $dom(\alpha) = \{\odot\}$, $\alpha \nVdash F\odot \rightarrow G\odot$, ty $\beta \Vdash F\odot$, $\beta \nVdash G\odot$

Så **saken är klar**.

15) Vi skall visa att det inte finns någon sentens i första ordningens predikatlogik (med likhet) som är sann precis om domänen antingen är oändlig eller har ett jämnt antal element.
Antag att p är en sådan sentens. Då är $\sim p$ en sentens som är sann precis om domänen är ändlig och har ett udda antal element. Någon sådan finns inte enligt ”Tillämpning 2” i kompletteringsmaterial K2 till kursen.
(Låt Δ vara sentensmängden $\{\sim p, p_1, p_2, p_3 \ldots\}$, där p_i är en sentens som är sann precis om domänen har minst i element (en sådan finns ju för alla i). Då skulle varje ändlig delmängd till Δ ha en modell (med tillräckligt stor ”udda domän”), men inte hela Δ (en modell för alla $p_1, p_2, p_3, \ldots$ måste ha oändlig domän). Detta motsäger kompakthetssatsen, så ett sådant p finns inte.)
Saken är klar.

16) Den givna sentensen $\forall u\, \exists X\, \forall x\,(Xx \leftrightarrow \exists y\, x = u(y))$ är sann precis om det för varje val av $\mathrm{Ref}(f) : D \rightarrow D$ finns $\mathrm{Ext}(P) \subseteq D$ så att för alla $\sigma \in D$ gäller att $\sigma \in \mathrm{Ext}(P)$ omm det finns $\tau \in D$ så att $\sigma = \mathrm{Ref}(f)(\tau)$, dvs precis om $\mathrm{Ext}(P)$ är $\mathrm{Ref}(f)$:s värdemängd. Den finns ju för alla $\mathrm{Ref}(f)$, så sentensen är sann i alla tolkningar, dvs
svar: Sentensen är en tautologi.