Institutionen för matematik
KTH
J.Kristoferson, B.Ek

Tentamen i 5B1928, LOGIK för D och IT
Måndagen den 24 maj 2004

Skrivtid: 8.00 – 13.00.
Examinatorer: Jan Kristoferson (IT), tel 7907287, och Bengt Ek (D), tel 7906951.
Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
För godkänt krävs 13 poäng på del A. Uppgifterna ger maximalt 2 poäng var.
Den som vårterminen 2004 klarat kontrollskrivning nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och skall inte göra dessa uppgifter).
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du klarat.

Del A

1) Vid ett besök på Knarrön (där ju var och en antingen är kung (och alltid talar sanning) eller narr (och alltid ljuger)) stöter vi på tre öbor, A, B och C, alla från den avlägsna lilla byn Knirke (i Knarröns glesbefolkade inland).
Då vi frågar hur liten deras by egentligen är, säger A: ”Det finns högst en narr i vår by.” B säger: ”Det finns minst en narr i byn.” C säger: ”Vi tre är de enda som bor i Knirke.”
Kan man avgöra om C är kung eller narr? I så fall, vad är hon?

2) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas)

$$\sim A \vee B,\ \sim(B \,\&\, C)\ \vdash\ C \to \sim A.$$

3) Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\forall x\,(Fx \to Gx),\ \exists x\,Fx\ \vdash\ \exists x\,(Fx \leftrightarrow Gx).$$

4) Visa att

$$\forall x\,(Fx \to Gx),\ \exists x\,Fx\ \nvDash\ \forall x\,(Fx \leftrightarrow Gx).$$

5) Formulera som predikatlogiska sentenser den information A:s respektive C:s yttranden i uppgift 1) ger, dvs ange som sentenser det vi får reda på att det är sant (oberoende av om A och C talade sanning eller inte).
Låt $\mathrm{Ref}(a) =$ A, $\mathrm{Ref}(b) =$ B, $\mathrm{Ref}(c) =$ C,
Kx : ”$\mathrm{Ref}(x)$ är kung” (och $\sim Kx$: ”$\mathrm{Ref}(x)$ är narr”).
Förutsätt att domänen består av alla innevånare i Knirke.

6) Använd tablåmetoden för att avgöra om

$$\forall x\,\forall y\,(Px \to Py)\ \vDash\ \forall x\,Px \vee \sim\exists x\,Px.$$

Om det inte gäller, använd tablån för att finna ett motexempel.

Vänd!

7) Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\forall x\, \exists y\, Rxy,\ \forall x\, \exists y \sim Ryx\ \vdash\ \exists x\, \exists y\, x \neq y.$$

8) Visa att

$$\forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow Ryx),\ \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy\, \&\, Ryz) \rightarrow Rxz),$$
$$\forall x\, \exists y\, (x \neq y\, \&\, Rxy)\ \nvDash\ \forall x\, \forall y\, Rxy.$$

9) För ϕ, ψ predikatlogiska formler utan andra fria variabler än x, definiera den binära relationen $\mathcal{S}$ enligt:
$\mathcal{S}\phi\psi$ är sann precis om $\vDash \exists x\, (\phi x \leftrightarrow \psi x)$.
Är $\mathcal{S}$ reflexiv, symmetrisk och/eller transitiv? Det skall klart framgå av lösningen vad dessa egenskaper innebär.

10) Visa att $\forall x\, 0 * x = 0$ följer ur Peanos axiom.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.

Del B

Denna del ger, om del A är godkänd, betyg fyra för 4-7 poäng och betyg fem för 8-12 poäng. Uppgifterna kan ge 2 poäng var.
Uppgifterna är troligen inte ordnade efter svårighet.
Var noga med att motivera dina svar!

11) Visa med naturlig deduktion i varianten S5 av modallogik (dvs den modallogik som presenteras i kursboken) att

$$\sim \Box\, A\ \vdash_{S5}\ \Diamond\, (A \rightarrow B).$$

SI-reglerna på formelbladet får användas.

12) Visa att i modal predikatlogik (fortfarande variant S5)

$$\exists x\, Qx,\ \exists x\, \Box\, Px,\ \Diamond\, (\forall x \sim Qx\, \&\, \exists x\, x = x)\ \nvDash_{S5}\ \Box\, \exists x\, (Qx \rightarrow Px).$$

13) Visa **med resonemang** att i intuitionistisk logik

$$A \rightarrow (B \rightarrow C),\ \sim (A \rightarrow C)\ \vDash_I\ \sim B.$$

Sambandet skall visas med ett resonemang om tolkningar, det är alltså **inte** tillåtet att använda t.ex. naturlig deduktion.

14) Visa att i intuitionistisk logik

$$\forall x\, Fx \rightarrow \exists x\, Gx\ \nvDash_I\ \exists x\, (Fx \rightarrow Gx).$$

15) Visa att det inte finns någon sentens i första ordningens predikatlogik med likhet som är sann precis om domänen antingen är oändlig eller har ett jämnt antal (dvs något av $2, 4, 6, \ldots$) element.

16) Är följande sentens i andra ordningens predikatlogik en tautologi, betingat sann eller en kontradiktion? Motivera ditt svar ordentligt.

$$\forall u\, \exists X\, \forall x\, (Xx \leftrightarrow \exists y\, x = u(y))$$

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.