Institutionen för Matematik, KTH
Avd. Matematik
TK 030202

5B1107, Differential- och integralkalkyl II, flervariabel för F1

Läsanvisningar, kap. 12-13, till
R.A. Adams, Calculus, a Complete Course, 4th ed.

Omfattning: kapitel 8.2, 8.3 t.o.m. s 497, 8.4, endast båglängd, 8.5 tom s. 506, 10.1, 10.5, 11.1, 11.3, 11.4 t o m sid 671, 12.1-12.7, 12.8, sid 750-752, 12.9, 13.1-13.2, 13.3 t.o.m. s. 789, 14.1-14.2, 14.3 till sid 834, 14.4-14.6, 14.7 t.o.m. s. 866, 15.1-15.4, 15.5 främst fallet $z = f(x, y)$, 15.6, 16.1, 16.3, 16.4.

I. Funktioner, derivator och integraler i flera variabler

Kapitel 10.1. Första halvan av detta avsnitt bör läsas parallellt med avsnitt 10.5 om 10.5 om kvadratiska ytor. Här finns många exempel som kommer att dyka upp under kursens gång. Det är viktigt att man har en hygglig uppfattning om hur dessa ytor ser ut. Med hjälp av matematikprogram, t ex Maple, kan man, kanske lite enklare, bekanta sig med funktioner i två och tre variabler, genom att låta programmet rita upp nivåkurvor eller -ytor (se nedan). Rekommenderas!

Den andra halvan av avsnitt 10.1, fr o m sid 601, handlar om hur begrepp som öppna och slutna intervall generaliseras till högre dimensioner. Man skall förstå begreppen öppen och sluten mängd, rand, inre punkt. En del av detta dyker upp i samband med max- och minproblem, i kap 13.

Kapitel 12 Partiella derivator.
12.1 Funktioner av flera variabler.
Definitionsmängd (domain of definition) och värdemängd (range) enl. def. 1.
Grafer: Ex. 1-2.
Nivåkurvor och -ytor: Ex. 3-5.
Läs gärna om andragradsytor i kap. 10.5 parallellt. Figur 10.35 är viktig med tanke på kommande analys av kritiska punkter (kap 13).

12.2 Gränsvärden och kontinuitet i flera variabler.
Gränsvärden och kontinuitet definieras (def. 2, 3, 4) i princip som för funktioner av en variabel. De vanliga räknelagarna gäller.

Observera att man kräver $|(x, y) - (a, b)| \to 0$. Den stora skillnaden är att man i en dimension bara kan låta $x \to a$ från två håll, uppifrån och nedifrån. I två dimensioner finns det massor av sätt att låta $(x, y) \to (a, b)$.

Ex. 1 är typiskt för funktioner som är definierade överallt.
Funktionerna i Ex. 2-4 är inte från början definierade i origo. Man kan då undersöka om funktionen i fråga har olika gränsvärden då $(x, y) \to (0, 0)$ längs olika kurvor. Detta är fallet i Ex. 2-3.

I Ex. 4 är själva poängen att täljarens gradtal är högre än gradtalet för samtliga termer i nämnaren. Omvänt är just detta problemet i Ex. 2-3.

12.3 Partiella derivator.
Definition av och beteckningar för partiella derivator; Ex. 1-3.
Den geometriska betydelsen är viktig och framgår av fig 12.15-12.16.
Tangentplan, normal, -linje (sid 711-712). Fig 12.17; ex 6-7.

12.4 Högre partiella derivator.
Beteckningar sid 715. Ex. 1.
Man skall känna till och kunna använda resultatet i Th. 1.
Laplaces ekvation, vågekvationen och värmeledningsekvationen är fundamentala i tillämpningar. Se Ex 3-4 samt övning 17.

12.5 Kedjeregeln.
Kedjeregeln för $z(x(t), y(t))$ och $z(x(s,t), y(s,t))$, sid 721-722. Ex 2-3.
Observera kommentaren på nedre delen av sid 722 om matrismultiplikation. Det gör den allmänna kedjeregeln lättare att komma ihåg och förstå. (Se sid 736-737 i kap 12.6.) Se också Ex 6-7 och fig 12.21.
Kedjeregeln för högre ordningens derivator: Ex 8, 9. Hoppa över Eulers sats, Th. 2.

12.6 Linjär approximation mm.
Linjärisering och linjär approximation, sid 731-732, Ex. 1. (Högre ordningens approximationer fås från Taylors formel i kap 12.9.)
Idén med differentierbarhet (Def 6) är att det skall finnas ett tangentplan. Th. 4 ger enkla villkor för detta.
I Ex 3 visas hur man med hjälp av differentialer kan göra approximationer.
På sid 736-737 formuleras den allmänna kedjeregeln. Man skall känna till Jacobimatrisen. Den kommer senare att dyka upp i samband med variabelbyte i dubbel- och trippelintegraler.

12.7 Gradient och riktningsderivata.
Definition av gradient (def 7); tolkning av densamma som normal: Th. 6 och Ex 1.
Riktningsderivata (def 8) och beräkning av denna med hjälp av gradienten: Th. 7 och Ex 2. Se också sid 746: ”Rates perceived by ...
I rutan längst ned på sid 743 ges en viktig annan tolkning av gradienten: *den riktning som representerar den största förändringen*; Ex 3.
På sid 685-686 behandlas tre dimensioner och det är helt analogt. Observera dock Ex 6-7, fig. 12.25 och kommentaren i rutan nedanför.

Mer explicit: om $f = f(x, y)$ så är gradienten ∇f en tvådimensionell vektor. $\nabla f(a, b)$ är ortogonal mot den nivåkurva $f(x, y) = c$ som går genom punkten (a, b), dvs $\nabla f(a, b)$ är normalvektor till tangentlinjen i denna punkt. På samma sätt är $\nabla F(a, b, c)$ normalvektor till tangentplanet till den nivåyta till F som går genom (a, b, c). Med $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ får vi den situation med tangentplan som behandlades i kap 12.3. Läs också Ex 8.

12.8 Implicita funktioner.
Den väsentliga idén finns i exemplet med en kurva i två dimensioner, sid. 689-690. Under föreläsningarna kommer fler lågdimensionella fall att genomgås. Det allmänna resultatet finns formulerat i Th. 8. Läs ex 1, 2, 3 6 och 8. Ex 4 är av intresse för fysiker.

12.9 Taylors formel mm.

Taylorpolynom (nedre rutan sid 763); approximation. Ex 1-2. Under föreläsningarna behandlas främst Taylors formel av ordning 2. Detta med tanke på andraderivatetestet (§13.1) som används vid karakterisering av kritiska punkter.

Då man arbetar med Taylors formel i två och flera dimensioner kan man ofta använda kända utvecklingar frå envariabelfallet.

Kapitel 13 Tillämpningar av partiella derivator.
13.1 Extremvärden.
Vid bestämning av största och minsta värde behövs några begrepp från kap. 10.1. Randpunkt, inre punkt, yttre punkt... enl definitioner på sid 602. Det är viktigt att man, åtminstone i enklare fall, förstår dessa begrepp.

Th. 1 visar att extremvärden bestäms ungefär som i en dimension, men det är mer krävande. Man måste kolla fler derivator och analysen av en funktion på randen, en eller flera kurvor i två dimensioner, är förstås besvärligare.
Ex 1-4.
I fig 13.1-13.3 ser man vad som händer i extrempunkter för olika andragradsytor (jfr kap 10.5). Genom Taylors formel kan många fall återföras till denna situation. Det är helt analogt med hur man i en variabel med hjälp av andraderivatan kan avgöra karaktären till en extrempunkt. Idén framgår tydligt i Ex 5.

Genom kvadratkomplettering får man Th. 3. I Ex 6 behandlas Ex 5 igen men utgående från Th. 3.

Tyvärr fungerar inte Th. 3 för tre eller fler variabler. Man dock kan alltid, i godtycklig dimension, titta på andraderivatorna direkt. Se avsnittet om kvadratiska former (quadratic forms), sid 776-778.

De kriterier som diskuteras på sid 778 kan uttryckas enklare med hjälp av matrisens egenvärden. Att Q är positivt definit betyder att samtliga egenvärden är > 0. Att Q är indefinit betyder att det finns egenvärden med olika tecken. Detta gäller i godtycklig dimension.

13.2 Största och minsta värden.
Läs ex 1-2 (direkta tillämpningar av Th. 1). Hoppa över avsnittet om linjär programmering.

13.3 Lagrangemultiplikatorer
Även om man i många exempel kan behandla problem med bivillkor 'direkt', är det nästan alltid enklare med Lagranges metod, Th. 4. Idén illustreras i figur 13.14. Läs i första hand Ex. 1-3 som behandlar fallet med ett bivillkor. (Flera bivillkor behandlas principiellt på precis samma sätt. Se Ex 4.)

Kapitel 14 Multipelintegraler.
14.1 Dubbelintegraler.
Dubbelintegralen införs som gränsvärde av Riemannsummor ungefär som i en dimension. Motivering är att beräkna volymen under en (positiv) funktion f på D. Speciellt får man för $f = 1$ arean av D.

14.2 Dubbelintegraler och upprepad integration.
Genom upprepad integration får man en metod att beräkna dubbelintegraler (Th. 2). Figur 14.13 förklarar varför metoden fungerar. Det är viktigt att från en figur kunna finna gränserna i de upprepade integralerna. Läs Ex 1-2.

För att kunna explicit beräkna en dubbelintegral måste man hitta en primitiv funktion. Det kan därför spela roll i vilken ordning man utför den upprepade integrationen. Se Ex 3.

14.3 Generaliserade dubbelintegraler och upprepad integration.
Dessa utförs, som i envariabelsfallet, via gränsvärden. Se Ex 1 och Ex 3. Hoppa över från och med avsnittet medelvärdessatsen på sid 834.

14.4 Dubbelintegraler i polära koordinater.
Formeln för areaelementet i polära koordinater är viktig och användbar:

$$dx\,dy = dA = r\,dr\,d\theta.$$

Läs Ex 1 och Ex 3. Ex 4 är klassisk (normalfördelningen).

Formeln för (ett allmänt) variabelbyte i en dubbelintegral, Th. 4, är viktig. Memorera den den på formen

$$dxdy = dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Ex 7-8.

14.5 Trippelintegraler.
Trippelintegraler införs och beräknas helt analogt med dubbelintegraler. Denna gång fås volymen vid integration av funktionen 1. Läs Ex 2 och Ex 4.

14.6 Variabelbyte i trippelintegraler.
Helt analogt med avsnitt 14.4. Notera speciellt *cylindriska koordinater* (polära koordinater tillsammans med z), sid 856-857,

$$dxdydz = dV = rdr\,d\theta\,dz,$$

och *sfäriska koordinater*. Dessa definieras på sid 859, och genom fig 14.41. De kan ses som en tredimensionell motsvarighet till polära koordinater. Volymselementet är

$$dxdydz = dV = \rho^2 \sin\phi d\rho\,d\phi\,d\theta.$$

Ex 2-3.

14.7 Tillämpningar av multipelintegraler.
Observera att ytelementet dS (sid 865) är helt analogt med båglängdselementet i en variabel. I stället för $ds = \sqrt{1+(y')^2}$ har vi nu $dS = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}$. Fig 14.45 ger en geometrisk förklaring. Det är redan nu värt att notera att $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}$ är längden av den, onormaliserade, normalvektorn till ytan, $\mathbf{N} = \pm(-z'_x, -z'_y, 1)$.

II. Vektoranalys

Kapitel 8 och 11 i urval; Kurvor, båglängd mm.

Tanken är att parallellt läsa om kurvor i två och tre dimensioner.

(**8.1** Orientering om andragradskurvor som ”kägelsnitt” för de intresserade.)

8.2-8.3 t.o.m. sid 497. Dessa avsnitt är av orienterande karaktär. Man skall främst lära sig att handskas med kurvor med allmän parameter.
8.2 Parametrisk kurva, def. 4. Kurva i planet, def 5. Ex 1-7.
8.3 Sats 1, Ex. 1-2. Tangent och normal till plana kurvor.

8.4 tom sid 201. Båglängdsformeln, sid 500. Dess förklaring i fig. 8.28 (Pythagoras sats). Ex. 1-2. (Areaberäkningar utförs senare med hjälp av Greens formel i kap 16.3.)

8.5 Polära koordinater (igen), sid. 506. Ex 1-2. Hoppa över fr o m rubriken ”Some Polar Curves”.

11.1 Viktiga begrepp: position, hastighet (velocity) och acceleration för en kurva (sid. 646-648). Notera att de alla tre är vektorer. Begreppet fart (speed) står för längden av hastighetsvektorn. Det är således en vanlig funktion (en ”skalär”).
Läs Ex. 1-5.

11.3 Det är viktigt att förstå att en kurvas hastighet och fart osv beror på parametriseringen. Man kan genomlöpa en viss kurva olika snabbt.

En kurvas båglängd införs på samma sätt i två och tre dimensioner. Som funktion är båglängden en primitiv funktion till kurvans fart. Konsekvensen är att om man väljer båglängden själv som parameter får kurvan konstant fart 1. Läs Ex. 1-4.

11.4 Krökning av en kurva får man först fram då kurvan är parametriserad med båglängden som parameter: def 1, sid 669. En mer intuitiv bild fås från Th 2, sid 671. Hoppa över resten av avsnittet.

11.5 Vi skall härleda formeln för krökningen i allmän parametrisering:

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3}.$$

resten av avsnittet hoppas över.

Kapitel 15 Vektorfält

(**15.1** Detta avsnitt, som handlar om vektorfält, är snarast en orientering inför senare studier av linje- och flödesintegraler. Läs gärna t.o.m. sid 879.)

15.2 t.o.m. sid 887. Begreppen konservativt fält och potentialfunktion är viktiga (Def. 1). Kriterierna för att fält skall vara konservativa på sid. 884 dyker upp mer naturligt i kap. 16 i samband med Greens och Stokes' formler.

De kan lättare uttryckas så att matrisen med $\mathbf{F}$s derivator skall vara symmetrisk. Läs Ex. 3-4 där man bestämmer potentialfunktioner. Ex. 5 är mer subtilt.

15.3 Läs Ex. 1-2 som exempel på hur man integrerar funktioner m.a.p. båglängd. En tolkning av $\int_C f\,ds$ är arean av ett staket, där C är basen (tomtgränsen), och f höjden.

15.4 Linjeintegralen motiveras genom arbete = kraft × sträcka. Dess definition och olika sätt att skriva integralen framgår av rutan på sid. 897. Läs Ex. 1 och 2.

Hoppa över “connected and simply connected domains”. Vad som är relevant i de flesta situationer är huruvida man för ett fält med en singularitet (Ex 5 i 17.2) omsluter singulariteten.

Sats 1, sid. 901, om oberoende av väg, är viktig. T ex kan man, för ett konservativt fält, välja en annan, lättare, integrationsväg. Obs den översta rutan på

sid 902: om man har bestämt en potentialfunktion så är linjeintegralen skillnaden mellan potentialfunktionens värden i änd- och begynnelsepunkterna.
Läs Ex 3 och 4.

15.5 Vi skall huvudsakligen behandla integraler över funktionsytor (grafer). Observera likheten mellan areaelementet $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$ för en yta $z = z(x, y)$, och båglängdselementet $ds = \sqrt{1 + (y')^2}$ för en kurva $y = y(x)$. Läs Ex 4-5.

(Formeln för dS i en allmän parametrisering finns på nedre halvan av sid 910. Den kan förstås alltid användas.)

15.6 Normal, orientering: se fig. 15.26. Flöde(sintegral): Def. 6. För flödesintegraler över funktionsytor används resultatet i rutan längst ned på sid 922.
Läs Ex. 4.

Kapitel 16 Integralformler

16.1 till mitt på sid 929.Divergens och rotation (curl): övre rutan på sid 928. Gradienten, sid 927, känner vi till sedan tidigare.

Det är viktigt att göra klart för sig hur operationerna fungerar: grad är definierad för funktioner och ger vektorer. div är definierad för vektorer och ger funktioner (skalärer), medan rotationen är definierad för vektorer och ger vektorer. Läs Ex. 1-2.

16.3 Huvudresultatet är Greens formel, Th. 6. Observera att formeln inte gäller för kurvor i planet som inte är slutna.

Observera ytformeln i Ex. 1. Läs också Ex. 2.

Exempel 3 illustrerar återigen att speciella effekter uppstår för vektorfält med singulariteter. Poängen är att fältet är singulärt i origo och att, om man går runt denna punkt, får man ett bidrag, nämligen 2π.

Divergenssatsen, Th. 7, får man lätt från Greens formel. De är ekvivalenta. Skillnaden är att man i Greens formel använder randkurvans tangent, och i divergenssatsen normalen till randkurvan. Om den orinterade tangenten är (T_1, T_2), saa är den utåtriktade normalen $(T_2, -T_1)$.

16.4 Det viktiga resultatet är divergenssatsen, Gauss' formel, i Th. 8. Läs Ex. 1-5. Vi skall inte använda de vektorversioner som nämns i Th. 9.

16.5 Stokes' sats är helt enkelt Greens formel för en krökt yta.