Institutionen för Matematik, KTH
Avd. Matematik
TK 021031

Differential- och integralkalkyl för F1, **5B1106, Envariabel, period 2**

LÄSANVISNINGAR TILL KAP 3-9 + LITE TILL I
R.A. ADAMS, CALCULUS, A COMPLETE COURSE, 4TH ED.

HELA KURSEN OMFATTAR: kapitel P, 1, 2, 3.1, 3.3-3.4, 3.5 till def. 13, 17.7 till s 1011, 17.8 t.o.m. s. 1019, 4.2, 4.3 (endast andraderivatetestet), 4.5, 4.7-4.8, 9.8 fram till Th. 23, 4.9, 5, 6.1, 6.2 t.o.m. s. 357, 6.3, 6.5, 7.1-7.3, 8.4, 9.1-9.2, 9.3 till s. 542, 9.4 till s 548, 9.5 t.o.m. s. 555, samt Th. 19.

17.7 (samma material finns också i kap 3.7) Karakteristiska ekvationen (**), sid. 1008. Beroende av hur de karakteristiska rötterna ser ut, uppstår tre olika fall (sid 1008-1009). De kan beskrivas som (I) skilda reella rötter, (II) sammanfallande rella rötter, samt (III) rötter med imaginärdel $\neq 0$.
Läs exempel 1-4. Av exempel 5 och 6 framgår vad som händer i tredje och högre ordningens ekvationer.

17.8 Den allmänna lösningen till en inhomogen ekvation är $y_h + y_p$, där y_p är en godtycklig (vilken som helst) partikulärlösning, och där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Ansats för partikulärlösningar (i enkla fall): rutan på sid. 1018. Hoppa över sid 1020-1021.
Läs exempel 1-2 samt om resonans på sid 1019.

4.2 Extremvärden: def. 1 (globala = absoluta), def. 2 (lokala). Sats 1, sid 234, är max/min-satsen från kap 1 (s. 80). Sats 2, sid. 235, är mycket viktig. Den ger en metod för att finna största och minsta värden till en kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$.
Läs exempel 1, 2, 3, 5 och 6.

4.3 I detta avsnitt ingår bara andraderivatetestet, Sats 6, sid 244. Läs ex 5.

4.5 I avsnittet behandlas "ostrukturerade" max/min-problem. Man måste själv formulera problemen matematiskt. Instruktivt avsnitt, trots den med övertydlighet utstakade problemlösningsmetoden på sid 259.
Läs exempel 1-5.

4.7 Formeln för linjär approximation (dvs. approximation av en funktion med dess tangentlinje) kan skrivas

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + E_1(x) = P_1(x) + R_1(x), \quad R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2,$$

där R_1 betecknar resttermen (felet) vid approximationen (av ordning 1). Det är en generalisering av medelvärdessatsen.
Läs exempel 1-4.

4.8 Taylors formel, Sats 10, sid. 282, är en generalisering av linjär approximation. Denna gång approximerar man f med ett polynom P_n av grad n. Detta polynom är valt så, att dess och dess derivators värden upp till ordning n sammanfaller

med f:s, i den givna punkten. Vi kan skriva detta $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, där approximationen $P_n(x)$ och felet $R_n(x)$ är givna i satsen.
Läs exempel 1, 2, 4, 6, 7.

9.8 (fram till Th. 23.) Det exakta uttrycket för resttermen ges av Th. 23, men förutsätter integration, som ännu inte introducerats. I alla händelser kan resttermen skrivas

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\, dt.$$

Läs exempel 1-2.

4.9 L'Hôpitals regel: Sats 12, sid. 290, Sats 13, sid. 292.
Läs exempel 2-8.

5.1-5.2 Här diskuteras areabegreppet och beräkning av areor genom limesövergång. Man bör genomföra någon sådan beräkning för att till fullo uppskatta effektiviteten i den metod vi senare beräknar integraler med.
Läs exempel 5.2.1-2.

5.3 Bestämda integraler införs genom över- och undersummor. Idén är att då indelningen blir finare skall, för "integrerbara" (def. 3) funktioner, dess över- och undersummor båda ha samma gränsvärde, (Riemann-)integralen av funktionen. Sats 2, sid. 316, visar att denna procedur fungerar för kontinuerliga funktioner. (Se också Appendix IV.)
Läs exempel 2-4.

5.4 Här härleds diverse egenskaper till den bestämda integralen (Sats 3, sid 317-318). Integralkalkylens medelvärdessats (Sats 4, sid 320) kommer in i den oumbärliga Integralkalkylens fundamentalsats i nästa avsnitt.
Läs exempel 1, 3.

5.5 Sats 5, Integralkalkylens fundamentalsats, är vad som gör integralen till ett användbart verktyg, genom kopplingen till differentialkalkylen. Satsen visar att varje kontinuerlig funktion har en primitiv funktion.
Läs exempel 2, 4, 7, 9.

5.6 Variabelsubstitution i integraler, Sats 6, sid 322, innebär att man använder kedjeregeln baklänges. Det är en viktig metod.

I samband med integrering av trigonometriska funktioner bör man kunna härleda formlerna för dubbla vinkeln; se nedre halvan av sid 335.
Läs exempel 3-6, 8.

5.7 Beräkning av area mellan två kurvor. Man måste först bestämma kurvornas skärningspunkter och sedan kontrollera vilken av funktionerna som är störst i resp delintervall, dvs bestämma "över"- och "underfunktion". Därefter beräknas integralen på vanligt sätt.
Läs exempel 1-4.

6.1 Formeln för partiell integration är viktig. Den följer av produktregeln för derivator.
Läs exempel 1, 2, 5, 6.

6.2 t.o.m. sid 357. Läs exempel 1-8. Substitutionen $\tan(\theta/2)$ är för integralentusiaster.

6.3 Det grundläggande exemplet i detta avsnitt är då nämnaren har skilda, enkla, nollställen, som i formlerna på nedre delen av sid 362. Detta behandlas i ex. 3-4.

Om någon faktor i nämnaren saknar reella rötter, t ex $x^2 + 1$, måste man göra en annan ansats, som i ex 5-6.

I ex 7-8 visas vad som händer om någon av faktorerna förekommer flera gånger.

6.5 I detta avsnitt behandlas ”generaliserade” integraler. De är två olika saker man måste tänka på. Dels kan integrationsintervallet vara oändligt, dels kan integranden vara obegränsad i någon av ändpunkterna. Man måste då beräkna integralen som ett gränsvärde, se ex 1, 2, 3, 5, 6.

Sats 2, sid. 378, behövs senare i samband med konvergens av serier.

7.1 Fig. 7.2-7.4 ger en föreställning om varför, rent allmänt, volym är integralen av area (formeln på övre halvan av sid 408). Formeln längst ned på sid 408 behandlar rotation kring x-axeln. Cylindriska skal, sid 411, bygger på en annan idé. Fig. 7.9 visar varför formeln på sid 412 gäller.

En sammanfattning av olika fall av rotationsvolymer finns på sid 414. Det är nog bättre att man lär sig hur dessa formler härleds, i stället för att lära dem utantill. Läs exempel 1-3, 6-7.

7.3 Båg- eller kurvlängd: formlerna mitt på sid 422. Figur 7.22 förklarar mekanismen. Läs ex 1-2.

Area av rotationsyta: se sammanställning på sid 426. (Återigen rekommenderas att man lär sig härledningen av dessa formler.) Läs ex 5-6.

9.1 Konvergens av talföljder (sequences), def. 1. Läs Ex. 5-6.

9.2 Konvergens av en (oändlig) serie betyder att följden av dess partialsummor s_n konvergerar: def. 3.

Den geometriska serien, def. 4, och resultaten om den, sid. 529, är ett måste. Läs Ex. 1. Ex. 4 skall man känna till: den harmoniska serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent. Sats 4, sid. 532, ger ett test för divergens: om inte den allmänna termen a_n går mot 0 så är serien divergent. (Obs att den harmoniska serien är divergent, men dess allmänna term går mot noll.)

9.3 Positiva serier. Detta är det centrala avsnittet i kapitlet. Det är viktigt att förstå att för positiva serier finns bara två möjligheter: seriens summa är ändlig (dvs konvergent) eller oändlig (dvs divergent).

Integraltestet, Sats 8, sid 535, är viktigt. Fig. 9.4 visar varför det fungerar. Dess konsekvens i Ex. 1, om p-serier, är ett måste. I Ex. 2 ges prov på en annan tillämpning av integraltestet.

Man bör kunna följande variant av Sats 10 (sid. 539):

Om $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ och

$$\frac{a_n}{b_n} \to L, \qquad 0 < L < \infty,$$

så gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergent} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konvergent.}$$

Genom det kan man jämföra en given serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med en känd serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Se Ex. 5.

Hoppa över sid 542 till slutet av avsnittet.

9.4 Absolutkonvergens, se def. 5. Sats 13, sid. 544, är viktig. Betingad (conditional) konvergens, def. 6. Resten av avsnittet hoppas över.

9.5 (t.o.m. sid 555, samt Th. 19) I samband med Taylors formel såg vi exempel på potensserier. Här dyker den geometriska serien upp igen. Th. 17, sid 554, skall ni känna till. Där ingår det viktiga begreppet konvergensradie. Ni behöver inte känna till allmänna metoder att bestämma denna.

Ni skall kunna använda Th. 19, sid. 563. Innanför konvergensradien får man derivera eller integrera en potensserie termvis. Läs Ex. 5, sid 565-566, och Ex. 7, sid. 567.