Institutionen för Matematik, KTH
Avd. Matematik
TK 020828

Differential- och integralkalkyl för F1, **5B1106, Envariabel**

Läsanvisningar till
R.A. Adams, Calculus, a Complete Course, 4th ed.

Omfattning: kapitel P, 1, 2, 3.1, 3.3-3.4, 3.5 till def. 13, 17.7 till s 1011, 17.8 t.o.m. s. 1019, 4.2, 4.3 (endast andraderivatetestet), 4.4 t.o.m. sid 250, 4.5, 4.7-4.8, 9.8 fram till Th. 23, 4.9, 5, 6.1, 6.2 t.o.m. s. 357, 6.3, 6.5, 7.1-7.3, 8.4, 9.1-9.2, 9.3 till s. 542, 9.4 till s 548, 9.5 t.o.m. s. 555, samt Th. 19.

Kap. P. Detta är väsentligen ett repetitionskapitel i vilket behandlas grundläggande material som förutsätts under kursen.

Man bör ha *funktionsbegreppet*, sid. 26, helt klart för sig. Vidare bör man ha kunskap om linjer, cirklar, parabler mm

Några andra viktiga begrepp i samband med funktioner är: *definitionsmängd* (domain of definition) och *värdemängd* (range) s. 26, samt sammansatta funktioner, s. 35. (Inversa funktioner, behandlas först i kap 3.1, s. 172-).

Rekommenderade övningar:

P1: 3, 6, 17, 19, 21, 25, 29, 37, 41; P2: 9, 11, 49; P3: 3, 7, 19, 29, 47, 49;
P4: 3, 5, 7, 13, 19, 45, 53; P5: 1, 5, 9, 21, 27, 29; P6: 5, 9, 15, 17, 21, 23, 27.

Kap. 1. Gränsvärden och kontinuitet.

1.1 Detta avsnitt är av orienterande och motiverande karaktär. Läs Ex 1-3.

1.2-1.3 Gränsvärdesbegreppet är fundamentalt i kursen. Du bör förstå den formella definitionen (sid 86 och framåt), i ljuset av den informella på sid 61. Den idé som ligger bakom är inte svår.

Vänster- och högergränsvärden definieras och förklaras på liknande sätt, men man betraktar bara punkter till höger resp vänster om den givna punkten (s. 64). Observera Sats 1 (s. 64): en funktion har gränsvärde i en punkt precis då dess vänster- och högergränsvärden i punkten existerar och är lika.

Vid beräkning av gränsvärden används gränsvärdeslagarna, s. 65.

Gränsvärde i $\pm\infty$ sid. 70. Vertikala och horisontella asymptoter: s. 70.
Läs exempel 1.2.1, 3-9; 1.3.1-10.

1.4 Då man infört gränsvärden är kontinuitet nästa steg. Att en funktion är kontinuerlig betyder att den har gränsvärden överallt och att dessa sammanfaller med funktionsvärdena. Definition 5, 6, 7, 8, och Sats 5, sid 76-77.

"De vanliga funktionerna" är kontinuerliga. Se s. 78, nedre delen. Vidare visar Sats 6 och 7, s 79, hur man bildar nya kontinuerliga funktioner från givna. Sats 6 är (bortsett från punkt 5.) egentligen bara en variant av gränsvärdeslagarna. Sats 7 är lite annorlunda. Tänk igenom varför den gäller.
Läs exempel 1-6.

Sats 8 (sid 80) är mycket viktig. Den är grunden i optimeringsproblem (max och min). Man bör förstå att satsen inte är sann, och varför, om man ändrar någon av förutsättningarna; se fig. 1.24.

Sats 9, ”satsen om mellanliggande värden”, används i tillämpningar för att finna nollställen, eller, allmännare, rötter till ekvationer.
Läs exempel 9-11.

(1.5) Läsning för dem som vill veta mer om gränsvärden och kontinuitet. (Se också Appendix III.)

Rekommenderade övningar:
1.2: 9, 17, 23, 25, 33, 59, 63, 65, 75; 1.3: 3, 7, 9, 17, 18, 35, 57
1.4: 1, 7, 13, 17, 29; 1.5: 1, 7, 13, 17, 29.

Kap 2. Derivatan.

2.1 I detta avsnitt förbereds derivatans införande genom en diskussion av lutning (slope) och tangentlinjer till kurvor $y = f(x)$. Det mesta bör vara bekant från gymnasiet, men, notera formeln för normalens lutning, sid. 99.
Läs exempel 1-7.

2.2 Definition av derivatan, s. 101. Ni bör i enkla exempel kunna beräkna derivator utgående från definitionen.

Derivata av potenser (power rule), s. 104. (Den visas för heltal i avsnitt 2.3. Det generella fallet kräver logaritmer (kap. 3).)

Observera Leibniz' beteckningar, sid 105. De gör många formler enklare och mer intuitiva.
Läs exempel 1-5.

2.3 Sats 1 säger att deriverbarhet medför kontiniutet. Deriveringsreglerna i Sats 2, 3, 5 måste man behärska; det finns inget utrymme för att göra fel här. Deriveringsreglerna skall ”sitta i ryggmärgen”.
Läs exempel 1-10.

2.4 Kedjeregeln, Sats 6, s. 119, är en hörnsten i differentialkalkylen. Den är lättast att komma ihåg med Leibniz' beteckningar (mitt på sidan).
Läs exempel 1-4.

2.5 Med hjälp av standardgränsvärdet (Sats 8, sid. 124)

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1,$$

och en trigonometrisk identitet (Ex. 1), kan man härleda derivatan till sinusfunktionen. Trigonometriska formler ger, tillsammans med deriveringsreglerna, uttryck för derivatorna till cosinus- och tangensfunktionerna, som man också skall kunna. Derivatan av t ex cotangens härleds lämpligen direkt, och vid behov. Observera att derivatan av tangens kan skrivas

$$\big(\tan x\big)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Det sista uttrycket är att föredra i samband med arcustangensfunktionen, som införs i avsnitt 3.5.

Anm. I engelskspråkig litteratur används ofta sekantfunktionerna $\sec x$, osv. Vi kommer inte att göra detta. Det räcker med funktionerna sin, cos, tan och cot.
Läs exempel 1-5.

2.6 Medelvärdessatsen (Sats 11, s. 131) är mycket viktig. Satsens geometriska betydelse framgår av figur 2.25 (s. 131). Figur 2.26 på samma sida visar att man inte kan ändra på någon av satsens förutsättningar.

Med hjälp av medelvärdessatsen kan man dra slutsatser om en funktions avtagande/växande om man vet derivatans tecken i ett intervall. Det viktigaste ur tillämpningssynpunkt är just detta, formulerat i Sats 12, s. 134. Begreppen avtagande/växande etc. införs i def. 5, s. 133.

Åter till medelvärdessatsen. Det är lätt att övertyga sig själv om att satsen gäller i det fall då funktionen är noll i intervallets ändpunkter (Rolles sats, sid 136, tyvärr utan figur). Man bör ändå notera, att man behöver satsen om största och minsta värde (max/min Theorem 8, s. 80). Från Rolles sats får man medelvärdessatsen genom ett slags variabelbyte; se fig. 2.30, s 136.
Läs exempel 1-5.

2.8 Högre ordningens derivator införs på naturligt sätt. Tolkning och tillämpningar följer i senare avsnitt.

2.9 Läs exempel 1, 2, 5, 6.

Rekommenderade övningar:
2.1: 3, 23; 2.2: 5, 11, 27, 45; 2.3: 15, 21, 39, 47; 2.4: 1, 3, 13, 15, 23, 31;
2.5: 5, 23, 31, 33, 43, 47, 51, 55; 2.6: 3, 5, 9, 15; 2.8: 1, 2, 7, 12; 2.9: 7, 15, 25.

3.1 Inverterbara (one-to-one) funktioner, def. 1. Invers funktion, def. 2. Figurerna 3.3 och 3.4 visar hur man får fram inversen genom att spegla funktionen i linjen $y = x$.

Inversens derivata, mitt på sid. 177.
Läs exempel 1, 2, 4.

(3.2) Som i gymnasiet? Repetera gärna avsnittet.

3.3 Här införs $\ln x$ som den primitiva funktionen till $1/x$ som tar värdet 0 för $x = 1$. (Egentligen behöver man Integralkalkylens fundamentalsats, avsnitt 5.5, här.) Från denna definition följer sedan logaritmlagarna (Sats 2) direkt. Exponentialfunktionen införs som invers till $\ln x$ och exponentiallagarna (Sats 3) följer av logaritmlagarna. Man visar sedan att med $e = \exp 1$ är $\exp x = e^x$.
Läs exempel 1-3, 6-8.

3.4 Exponentiell och logaritmisk tillväxt: Sats 5, och dess sammanfattning i rutan på sid. 194. e^x som gränsvärde, sid. 198.
Läs exempel 1-3.

3.5 Sinus och andra trigonometriska funktioner är periodiska och därmed inte inverterbara: alla värden antas ju oändligt många gånger. Genom att betrakta dem på lämpliga delintervall, kan man invertera. På så sätt får man arcusfunktionerna $\arcsin x$, def. 9, fig 3.18; $\arctan x$, def. 11, fig. 3.22, samt $\arccos x$, def. 12, fig. 3.25(a). (Inverser till sekantfunktionerna, s. 208-209, ingår inte.)

Derivator av $\arcsin x$, sid 203; $\arctan x$, sid 206.
Läs exempel 1, 3, 5, 7, 9.

Rekommenderade övningar:
3.1: 9, 11, 21; (3.2: 5, 7, 27-32, för den som vill eller behöver)
3.3: 3, 5, 21, 23, 39, 41; 3.5: 1, 3, 9, 13, 15, 19, 21;