

Formelblad som delas ut på tentan i SF1851, 2009

Observera att det ej är tillåtet att använda räknare på tentan!

$$\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top), \quad \mathcal{R}(\mathbf{A}^\top)^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}), \quad \mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{A}^\top), \quad \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{A}).$$

Simplexmetoden för LP-problem på standardform:

$$\mathbf{A}_\beta = [\mathbf{a}_{\beta_1} \cdots \mathbf{a}_{\beta_m}], \quad \mathbf{A}_\delta = [\mathbf{a}_{\delta_1} \cdots \mathbf{a}_{\delta_\ell}], \quad \mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}, \quad \bar{z} = \mathbf{c}_\beta^\top \bar{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{A}_\beta^\top \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta, \quad \mathbf{r}_\delta^\top = \mathbf{c}_\delta^\top - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}_\delta.$$

Färdiga om $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$. Annars, välj ett q med $r_{\delta_q} < 0$. $k = \delta_q$, $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_k = \mathbf{a}_k$, $x_k = t$,

$$z = \bar{z} + r_k t, \quad \mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_k t, \quad t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{pk}}. \text{ Låt } \delta_q \text{ och } \beta_p \text{ byta plats.}$$

Duala problemet till allmänt LP-problem:

minimera	$\mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^\top \mathbf{x}_2$	maximera	$\mathbf{b}_1^\top \mathbf{y}_1 + \mathbf{b}_2^\top \mathbf{y}_2$
då	$\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_1,$	då	$\mathbf{A}_{11}^\top \mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{21}^\top \mathbf{y}_2 \leq \mathbf{c}_1,$
	$\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2,$		$\mathbf{A}_{12}^\top \mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{22}^\top \mathbf{y}_2 = \mathbf{c}_2,$
	$\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_2 \text{ fri.}$		$\mathbf{y}_1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}_2 \text{ fri.}$

Kvadratiska funktioner: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + c_0$, med \mathbf{H} symmetrisk.

$\nabla f(\mathbf{x}) = (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c})^\top$, $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{H}$, $f(\mathbf{x} + t \mathbf{d}) = f(\mathbf{x}) + t (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c})^\top \mathbf{d} + \frac{1}{2} t^2 \mathbf{d}^\top \mathbf{H} \mathbf{d}$.
 $\hat{\mathbf{x}}$ är en minpunkt till f om och endast om \mathbf{H} är positivt semidefinit och $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

QP med likhetsbivillkor: minimera $\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + c_0$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Nollrumsmetod: $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\hat{\mathbf{v}}$, $(\mathbf{Z}^\top \mathbf{H} \mathbf{Z})\hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{Z}^\top (\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})$,

Lagrangemetod: $\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{A}^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$.

MN-lösning till MK-problem: $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \mathbf{A}^\top \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \hat{\mathbf{u}}$.

Newton: $\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^\top$ ger $\mathbf{d}^{(k)}$ om $\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})$ är positivt definit.
 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t_k \mathbf{d}^{(k)}$ där t_k uppfyller $f(\mathbf{x}^{(k)} + t_k \mathbf{d}^{(k)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$.

Ickelinjär MK: minimera $f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (h_i(\mathbf{x}))^2 = \frac{1}{2} |\mathbf{h}(\mathbf{x})|^2$, där $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$.
 $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})$ en $m \times n$ -matris med $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ i rad nr i och kolonn nr j .

$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})^\top \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})$ (radvektor), $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^\top \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \sum_i h_i(\mathbf{x}) \nabla^2 h_i(\mathbf{x})$.

Gauss-Newton: $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})^\top \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d} = -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})^\top \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})$ ger $\mathbf{d}^{(k)}$.
 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + t_k \mathbf{d}^{(k)}$ där t_k uppfyller $f(\mathbf{x}^{(k)} + t_k \mathbf{d}^{(k)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$.

NLP med likhetsbivillkor: minimera $f(\mathbf{x})$ då $h_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Lagrange-villkoren: $\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_i \hat{u}_i \nabla h_i(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}^\top$ samt $h_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

NLP med olikhetsbivillkor: minimera $f(\mathbf{x})$ då $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$.

KKT-villkoren: $\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_i \hat{y}_i \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}^\top$, $g_i(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$, $\hat{y}_i \geq 0$, $\hat{y}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$.