$\boxed{I1}$ VISA ATT: $\sum_{k=2}^{n}(k-1)\cdot k = \frac{n^3-n}{3}$ $(*)$

FÖR $n=2,3,4,\dots$

BASFALL: OM $n=2$ DÅ

$$\left.\begin{aligned} V\text{-}L &= \sum_{k=2}^{2}(k-1)k = 1\cdot 2 = 2 \\ H\text{-}L &= \frac{2^3-2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}\right\} (*) \text{ GÄLLER DÅ } n=1$$

INDUKTIONSSTEG: VISA ATT <u>OM</u> $(*)$ GÄLLER ~~DÅ~~ FÖR $n=p$ <u>DÅ</u> FÖLJER DET ATT $(*)$ OCKSÅ GÄLLER FÖR $n=p+1$.

FÖR ATT VISA INDUKTIONSSTEGET SÅ ANTAR VI ATT $(*)$ GÄLLER FÖR $n=p$. MEN DÅ FÅR VI ATT:

$$\sum_{k=2}^{p+1}(k-1)\cdot k = ((p+1)-1)\cdot(p+1) + \sum_{k=2}^{p}(k-1)\cdot k$$ (SKRIV HÖGSTA TERMEN FÖR SIG)

$$= p\cdot(p+1) + \frac{p^3-p}{3}$$ (ENLIGT ANTAGANDET FÖR $n=p$)

$$= \frac{3p(p+1)+p^3-p}{3} = \frac{p^3+3p^2+2p}{3}$$

$$= \frac{p^3+3p^2+3p+1-(p+1)}{3}$$

$$= \frac{(p+1)^3-(p+1)}{3}$$ (BINOMIALSATSEN)

VILKET VISAR ATT $(*)$ ÄVEN GÄLLER FÖR $n=p+1$.

FRÅN BASFALLET VET VI ATT $(*)$ GÄLLER FÖR $n=2$. NU TILLÄMPAR VI INDUKTIONSSTEGET FÖR ATT SE ATT DÅ GÄLLER $(*)$ ÄVEN FÖR $n=2+1=3$. UPPREPNING AV INDUKTIONSSTEGET VISAR ATT $(*)$ GÄLLER FÖR $n=3+1=4$ OCH VIDARE UPPREPNING VISAR ATT $(*)$ GÄLLER FÖR $n=5,6,7,\dots$, D.V.S. $(*)$ GÄLLER FÖR <u>ALLA</u> $n=2,3,4,\dots$ $\square$

$\boxed{\text{I 2}}$ VISA ATT: $3^n \geq n \cdot 2^n$ (*)

FÖR $n = 1, 2, 3, \ldots$

INDUKTIONSSTEG: VISA ATT OM (*) GÄLLER FÖR $n = m$

DÅ FÖLJER DET ATT (*) GÄLLER FÖR $n = m+1$.

FÖR ATT VISA DETTA ANTAR VI ATT (*) GÄLLER OM VI SÄTTER $n=m$ I (*). FÖR ATT GÖRA BEVISET LITE LÄTTARE SÅ VISAR VI ATT DETTA MEDFÖR ATT

(+) $\dfrac{3^{m+1}}{(m+1)2^{m+1}} \geq 1$ VILKET ÄR EKVIVALENT MED $3^{m+1} \geq (m+1)2^{m+1}$.

NU VISAR VI ATT (+) GÄLLER:

$$\frac{3^{m+1}}{(m+1)\cdot 2^{m+1}} = \frac{3 \cdot 3^m}{(m+1)\cdot 2^{m+1}}$$

$$\geq \frac{3 \cdot m \cdot 2^m}{(m+1)2^{m+1}} \quad \text{(ENLIGT ANTAGANDET FÖR } n=m\text{)}$$

$$= \frac{3 \cdot m}{2 \cdot (m+1)}$$

VI KOMMER NU INTE LÄNGRE OM $m=1$, D.V.S. I DETTA FALL FUNGERAR INTE INDUKTIONSSTEGET. MEN, OM $m \geq 2$ SÅ GÅR DET BRA, TY:

$$\frac{3^{m+1}}{(m+1)2^{m+1}} \geq \frac{3 \cdot m}{2 \cdot (m+1)} \geq \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot (2+1)} = \frac{6}{6} = 1$$

VI HAR ALLTSÅ BEVISAT FÖLJANDE UTSAGA:

(**) OM $3^m \geq m \cdot 2^m$ OCH $m \geq 2$ DÅ $3^{m+1} \geq (m+1) \cdot 2^{m+1}$

NU FÅR VI TVÅ BASFALL:

$n=1$: $\left.\begin{array}{l} V\text{-}L = 3^1 = 3 \\ H\text{-}L = 1 \cdot 2^1 = 2 \end{array}\right\}$ $3 \geq 2$ SÅ (*) OK DÅ $n=1$

$n=2$: $\left.\begin{array}{l} V\text{-}L = 3^2 = 9 \\ H\text{-}L = 2 \cdot 2^2 = 8 \end{array}\right\}$ $9 \geq 8$ SÅ (*) OK DÅ $n=2$

MEN NU KAN VI SE ATT (*) MÅSTE GÄLLA FÖR ALLA n, TY:

OM $n=3$ DÅ KAN VI TILLÄMPA (**), FÖR ATT OM $m=2$ SÅ MEDFÖR (**) ATT (*) GÄLLER FÖR $n=m+1=2+1=3$. OM VI TILLÄMPAR (**) IGEN SER VI ATT (*) GÄLLER FÖR $n=3+1=4$, UPPREPAD TILLÄMPNING AV (**) VISAR ATT (*) GÄLLER FÖR $n=5,6,7,\ldots$ O.S.V.

MED ANDRA ORD: (*) GÄLLER FÖR <u>ALLA</u> $n=1,2,3,\ldots$. $\square$

$\boxed{\text{I3}}$ VISA $5^n - 1$ ÄR JÄMT DELBART MED 4 FÖR $n = 1, 2, 3, \ldots$

OBS! $5^n - 1$ ÄR JÄMT DELBART MED 4 OM OCH ENDAST OM VI KAN SKRIVA $5^n - 1 = 4 \cdot m$ FÖR NÅGOT HELTAL m (SOM BEROR PÅ n).

BASFALL: OM $n = 1$ SÅ $5^1 - 1 = 4 = 4 \cdot 1$ SÅ $5^1 - 1$ ÄR DELBART MED 4.

INDUKTIONSSTEG: ANTAG ATT $5^p - 1 = 4 \cdot m$, DÅ

$$
\begin{aligned}
5^{p+1} - 1 &= 5^p \cdot 5 - 1 \\
&= (4m+1) \cdot 5 - 1 \\
&= 4 \cdot 5 \cdot m + 5 - 1 \\
&= 4 \cdot 5m + 4 \\
&= 4 \cdot (5m+1)
\end{aligned}
$$

VILKET VISAR ATT ÄVEN $5^{p+1} - 1$ ÄR DELBART MED 4.

INDUKTIONSPRINCIPEN MEDFÖR ATT $5^n - 1$ ÄR JÄMT DELBART MED 4 FÖR $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\square$

I4 VISA ATT: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$, (*)

FÖR $n=1,2,3,\dots$

(ENLIGT FORMELN FÖR ARITMETISK SUMMA SÅ ÄR H-L:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
)

BASFALL: OM $n=1$ SÅ

$$\left.\begin{aligned} V\text{-}L &= \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 \\ H\text{-}L &= \frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4} = 1 \end{aligned}\right\} \text{(*) OK FÖR } n=1$$

INDUKTIONSSTEG: ANTAG ATT (*) GÄLLER FÖR $n=p$, DÅ

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^3 = (p+1)^3 + \sum_{k=1}^{p} k^3$$

$$= (p+1)^3 + \frac{p^2(p+1)^2}{4} \quad \text{(ENLIGT ANTAGANDET FÖR } n=p)$$

$$= \frac{4(p+1)^3 + p^2(p+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(p+1)^2\cdot(4(p+1)+p^2)}{4} = \frac{(p+1)^2\cdot(p^2+4p+4)}{4}$$

$$= \frac{(p+1)^2\cdot(p+2)^2}{4} = \frac{(p+1)^2\cdot((p+1)+1)^2}{4}$$

VILKET VISAR ATT (*) ÄVEN GÄLLER FÖR $n=p+1$.

ENLIGT INDUKTIONSPRINCIPEN GÄLLER SÅLEDES (*) FÖR $n=1,2,3,\dots$ □
