

1.35 BERÄKNA (GEOMETRISK) SUMMA

$$\begin{aligned} a) \quad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 &= 2^0 + 2^1 + \dots + 2^5 \\ &= \sum_{k=0}^5 2^k \\ &= \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 63 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{128} &= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^8 \right) \\ &= 2 \cdot \sum_{k=0}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{512}}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{511}{512} \\ &= \frac{511}{128} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^9 &= (-x)^0 + (-x)^1 + (-x)^2 + (-x)^3 + \dots + (-x)^9 \\ &= \sum_{k=0}^9 (-x)^k \\ &= \frac{1 - (-x)^{10}}{1 - (-x)} \\ &= \frac{1 - x^{10}}{1 + x} \end{aligned}$$

1.37

BERÄKNA SUMMAN:

$$b) \sum_{k=1}^n e^{-k} = \sum_{k=1}^n e^{-1} \cdot e^{-k+1} = e^{-1} \sum_{k=1}^n e^{-k+1} = \text{[scribbled out]}$$

$$\text{[scribbled out]} = \left\{ j = k-1, \begin{array}{l} k=1 \Rightarrow j=0 \\ k=n \Rightarrow j=n-1 \end{array} \right\} =$$

$$= e^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} e^{-j} = e^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{e}\right)^j$$

$$= e^{-1} \cdot \frac{1 - (e^{-1})^n}{1 - e^{-1}} = \underline{\underline{\frac{1 - e^{-n}}{e - 1}}}$$

$$e) \sum_{k=2}^5 \frac{k \cdot (-1)^k}{2^k}$$

OBS! EN GEOMETRISK SUMMA, TY

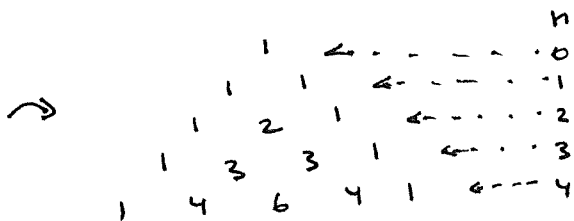
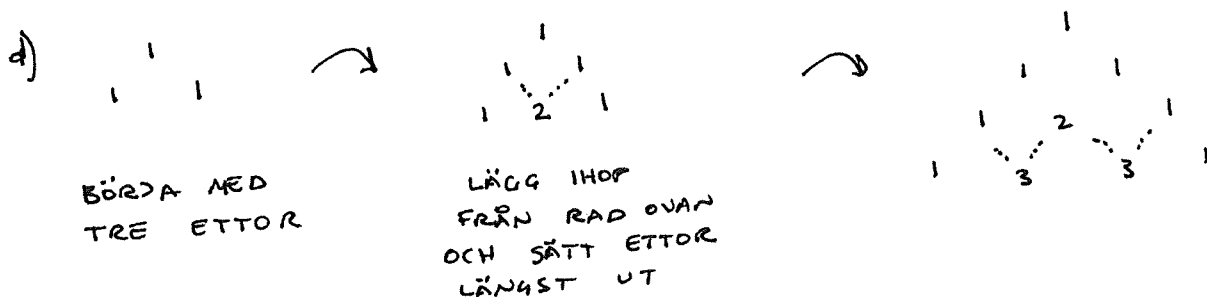
$$\frac{\frac{k \cdot (-1)^k}{2^k}}{\frac{(k+1) \cdot (-1)^{k+1}}{2^{k+1}}} = \frac{2^{k+1}}{2^k} \cdot \frac{k \cdot (-1)^k}{(k+1) \cdot (-1)^{k+1}} = -2 \cdot \frac{k}{k+1}$$

D.V.S. KVOTEN AV TVÅ PÅ VARANDRA FÖLJANDE TERMER
ÄR EN KONSTANT (DEN BERÖR PÅ INDEX k).

VI FÅR RÄKNA PÅ "FÖR HAND":

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^5 \frac{k \cdot (-1)^k}{2^k} &= \frac{2 \cdot (-1)^2}{2^2} + \frac{3 \cdot (-1)^3}{2^3} + \frac{4 \cdot (-1)^4}{2^4} + \frac{5 \cdot (-1)^5}{2^5} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{5}{32} = \frac{16}{2 \cdot 16} - \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 4} + \frac{8}{4 \cdot 8} - \frac{5}{32} \\ &= \frac{16 - 12 + 8 - 5}{32} = \underline{\underline{\frac{7}{32}}} \end{aligned}$$

1.42 BTTG UPP PASCALS TRIANGEL



NU KAN VI SKRIVA UPP $(a+b)^n$ FÖR $n=2,3,4$

a) $(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$

b) $(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$

c) $(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot b^4$

1.45 BESTÄM KOEFFICIENTEN FÖR x^3 I POLYNOLET:

$$(3-x)^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} 3^k \cdot (-x)^{8-k} \quad (\text{BINOMIALSATSEN})$$

x^3 KOEFFICIENTEN FÅS FRÅN $k=5$ ($8-5=3$):

$$\binom{8}{5} 3^5 \cdot (-x)^{8-5} = \binom{8}{5} 3^5 \cdot (-x)^3$$

$$= \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot 3^5 \cdot (-x)^3$$

~~$$\binom{8}{5} 3^5 \cdot (-x)^3$$~~

$$= -\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot 3^5 \cdot x^3$$

$$= -8 \cdot 7 \cdot 3^5 \cdot x^3 = \underline{\underline{-56 \cdot 3^5 \cdot x^3}}$$

KOEFFICIENT

SVAR: $-56 \cdot 3^5$ ($= -13608$)

1.47

VAD ÄR HÖGSTA GRADSTERMEN

$$1 \quad (x^3-2)^{16} - (x^4+3)^{12} ?$$

ANVÄND BINOMIALSATSEN:

$$(1) \quad (x^3-2)^{16} = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} \cdot (x^3)^k \cdot (-2)^{16-k}$$

$$(2) \quad (x^4+3)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (x^4)^k \cdot (3)^{12-k}$$

HÖGSTA GRADSTERMENA FÖR (1) OCH (2) ÄR

$$\binom{16}{16} \cdot (x^3)^{16} \cdot (-2)^0 = x^{48}$$

$$\binom{12}{12} \cdot (x^4)^{12} \cdot (3)^0 = x^{48}$$

DESSA TAR UT VARANDRA (VI ÄR INTRESSERADE AV "(1)-(2)",
SÅ VI RÄKNAR UT NÄST-HÖGSTA ORDNINGENS TERMER:

$$\binom{16}{15} \cdot (x^3)^{15} \cdot (-2)^{16-15} = 16 \cdot x^{45} \cdot (-2)^1 = -32 \cdot x^{45} \quad \leftarrow \text{HÖGST!}$$

$$\binom{12}{11} \cdot (x^4)^{11} \cdot 3^{12-11} = 12 \cdot x^{44} \cdot 3 = 48 \cdot x^{44}$$

SVAR: $-32x^{45}$

2 - T2007

BERÄKNA SUMMAN:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n=1}^5 n! &= 1! + 2! + 3! + 4! + 5! \\ &= 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ &= 1 + 2 + 6 + 24 + 120 \\ &= \underline{\underline{153}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{n=1}^{100} (2n+1) &= \left(\sum_{n=1}^{100} 2n \right) + \left(\sum_{n=1}^{100} 1 \right) = \left(2 \sum_{n=1}^{100} n \right) + 100 \cdot 1 \\ &= 100 + 2 \cdot \frac{100(100+1)}{2} = 100 + 100 \cdot 101 \\ &= 100 + 10100 = \underline{\underline{10200}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{100} + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} \\ &= 1 - \frac{1}{101} = \frac{101-1}{101} = \underline{\underline{\frac{100}{101}}} \\ &\text{(TELESKOPERANDE SUMMA)} \end{aligned}$$
