KAP. 1.4

$\boxed{1.35}$ BERÄKNA (GEOMETRISK) SUMMA!

a) $1+2+4+8+16+32 = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^5$

$$= \sum_{k=0}^{5} 2^k$$

$$= \frac{2^6 - 1}{2-1} = 63$$

c) $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{128} = 2\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{256}\right)$

$$= 2\cdot\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^0+\left(\tfrac{1}{2}\right)^1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\tfrac{1}{2}\right)^8\right)$$

$$= 2\cdot\sum_{k=0}^{8}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k$$

$$= 2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{1-\frac{1}{512}}{\frac{1}{2}} = 4\cdot\frac{511}{512}$$

$$= \frac{511}{128}$$

e) $1-x+x^2-x^3+\cdots-x^9 = (-x)^0+(-x)^1+(-x)^2+(-x)^3+\cdots+(-x)^9$

$$= \sum_{k=0}^{9}(-x)^k$$

$$= \frac{1-(-x)^{10}}{1-(-x)}$$

$$= \frac{1-x^{10}}{1+x}$$

$\boxed{1.37}$ BERÄKNA SUMMAN:

b) $$\sum_{k=1}^{n} e^{-k} = \sum_{k=1}^{n} e^{-1}\cdot e^{-k+1} = e^{-1}\sum_{k=1}^{n} e^{-k+1} = $$

$$= \left\{ j = k-1,\ \begin{matrix} k=1 \Rightarrow j=0 \\ k=n \Rightarrow j=n-1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= e^{-1}\cdot \sum_{j=0}^{n-1} e^{-j} = e^{-1}\cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{e}\right)^{j}$$

$$= e^{-1}\cdot \frac{1-(e^{-1})^{n}}{1-e^{-1}} = \underline{\underline{\frac{1-e^{-n}}{e-1}}}$$

e) $$\sum_{k=2}^{5} \frac{k\cdot(-1)^k}{2^k}$$

OBS! EJ GEOMETRISK SUMMA, TY

$$\frac{\frac{k\cdot(-1)^k}{2^k}}{\frac{(k+1)\cdot(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}} = \frac{2^{k+1}}{2^k}\cdot\frac{k\,(-1)^k}{(k+1)\cdot(-1)^{k+1}} = -2\cdot\frac{k}{k+1}$$

D.V.S., KVOTEN AV TVÅ PÅ VARANDRA FÖLJANDE TERMER ÄR EJ KONSTANT (DEN BEROR PÅ INDEX k).

VI FÅR RÄKNA PÅ "FÖR HAND":

$$\sum_{k=2}^{5} \frac{k\cdot(-1)^k}{2^k} = \frac{2\cdot(-1)^2}{2^2} + \frac{3\cdot(-1)^3}{2^3} + \frac{4\cdot(-1)^4}{2^4} + \frac{5\cdot(-1)^5}{2^5}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{5}{32} = \frac{16}{2\cdot 16} - \frac{3\cdot 4}{8\cdot 4} + \frac{8}{4\cdot 8} - \frac{5}{32}$$

$$= \frac{16-12+8-5}{32} = \underline{\underline{\frac{7}{32}}}$$

1.42 BYGG UPP PASCALS TRIANGEL

d)

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

BÖRJA MED TRE ETTOR

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array}$$

LÄGG IHOP FRÅN RAD OVAN OCH SÄTT ETTOR LÄNGST UT

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & & & & & n = 0 \\ & & & 1 & & 1 & & & & & 1 \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & & & 2 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & 3 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 4 \end{array}$$

NU KAN VI SKRIVA UPP $(a+b)^n$ FÖR $n=2,3,4$

a) $(a+b)^2 = 1\cdot a^2 \cdot 2\cdot a\cdot b + 1\cdot b^2$

b) $(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + 1\cdot b^3$

c) $(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3\cdot b + 6\cdot a^2\cdot b^2 + 4\cdot a\cdot b^3 + 1\cdot b^4$

1.45 BESTÄM KOEFFICIENTEN FÖR x^3 I POLYNOMET:

$$(3-x)^8 = \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}3^k\cdot(-x)^{8-k}$$ (BINOMIALSATSEN)

x^3 KOEFFICIENTEN FÅS FRÅN $k=5$ $(8-5=3)$:

$$\binom{8}{5}3^5\cdot(-x)^{8-5} = \frac{8!}{5!\cdot 3!}\cdot 3^5\cdot(-x)^3$$

$$= -\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}\cdot 3^5\cdot x^3$$

$$= -8\cdot 7\cdot 3^5\cdot x^3 = \underbrace{-56\cdot 3^5}_{\text{KOEFFICIENT}}\cdot x^3$$

SVAR: $-56\cdot 3^5$ $(=-13608)$

$\boxed{1.47}$ VAD ÄR HÖGSTAGRADSTERMEN I $(x^3-2)^{16}-(x^4+3)^{12}$?

ANVÄND BINOMIALSATSEN:

(1) $$(x^3-2)^{16} = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} \cdot (x^3)^k \cdot (-2)^{16-k}$$

(2) $$(x^4+3)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (x^4)^k \cdot (3)^{12-k}$$

HÖGSTAGRADSTERMERNA FÖR (1) OCH (2) ÄR

$$\binom{16}{16} \cdot (x^3)^{16} \cdot (-2)^0 = x^{48}$$

$$\binom{12}{12} \cdot (x^4)^{12} \cdot (3)^0 = x^{48}$$

DESSA TAR UT VARANDRA (VI ÄR INTRESSERADE AV "(1)-(2)"), SÅ VI RÄKNAR UT NÄST-HÖGSTA ORDNINGENS TERMER:

$$\binom{16}{15} \cdot (x^3)^{15} \cdot (-2)^{16-15} = 16 \cdot x^{45} \cdot (-2)^1 = -32 \cdot x^{45} \leftarrow \text{HÖGST!}$$

$$\binom{12}{11} \cdot (x^4)^{11} \cdot 3^{12-11} = 12 \cdot x^{44} \cdot 3 = 48\, x^{44}$$

SVAR: $-32x^{45}$

$\boxed{2 - T2007}$ BERÄKNA SUMMAN:

a) $$\sum_{n=1}^{5} n! = 1! + 2! + 3! + 4! + 5!$$
$$= 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$$
$$= 1 + 2 + 6 + 24 + 120$$
$$= \underline{\underline{153}}$$

b) $$\sum_{n=1}^{100} (2n+1) = \left(\sum_{n=1}^{100} 2n\right) + \left(\sum_{n=1}^{100} 1\right) = \left(2\sum_{n=1}^{100} n\right) + 100\cdot 1$$
$$= 100 + 2\cdot\frac{100(100+1)}{2} = 100 + 100\cdot 101$$
$$= 100 + 10100 = \underline{\underline{10200}}$$

c) $$\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right)$$
$$= 1 \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \underbrace{- \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} - \cdots \underbrace{- \frac{1}{100} + \frac{1}{100}} - \frac{1}{101}$$
$$= 1 - \frac{1}{101} = \frac{101-1}{101} = \underline{\underline{\frac{100}{101}}}$$

(TELESKOPERANDE SUMMA)