INDUKTION

BESTÄM VÄRDENA FÖR a_n, $n = 2, 3, 4, \ldots$, DÅ

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} & \text{(i)} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

D.V.S. VI SÖKER EN FORMEL SÅ ATT VI SNABBT OCH ENKELT KAN BESTÄMMA a_n T.EX. DÅ $n = 1000$. VI KAN ANVÄNDA (i) FÖR ATT BESTÄMMA a_3, SEDAN a_4, O.S.V. MEN DET SKULLE TA LÅNG TID ATT RÄKNA UT a_{1000} PÅ DETTA SÄTT.

TYPISKT FÖR PROBLEM ~~[illegible]~~ AV DETTA SLAG ÄR ATT MAN BETRAKTAR NÅGRA TERMER, T.EX. a_0 TILL a_5 OCH SEDAN GISSAR MAN EN ALLMÄN FORMEL. DÄREFTER BEVISAR MAN ATT FORMELN ÄR RIKTIG.

LÅT OSS FÖRSÖKA GISSA EN FORMEL:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 2 \\ a_2 &= 3\cdot 2 - 2\cdot 1 = 6 - 2 = 4 && \text{(ENLIGT (i))} \\ a_3 &= 3\cdot 4 - 2\cdot 2 = 12 - 4 = 8 && \text{— " —} \\ a_4 &= 3\cdot 8 - 2\cdot 4 = 24 - 8 = 16 && \text{— " —} \\ a_5 &= 3\cdot 16 - 2\cdot 8 = 48 - 16 = 32 && \text{— " —} \end{aligned}$$

NU TYCKS DET ATT TERMERNA FÖLJER ETT MÖNSTER; NÄMLIGEN

$$a_0 = 2^0, \quad a_1 = 2^1, \quad a_2 = 2^2, \quad a_3 = 2^3, \quad a_4 = 2^4, \quad a_5 = 2^5$$

VI GISSAR SÅLEDES ATT $a_n = 2^n$ FÖR ALLA n. VI VET INTE ATT T.EX. $a_{1000} = 2^{1000}$ SÅ VI MÅSTE BEVISA DENNA GISSNING.

<u>BEVIS</u> ATT $a_n = 2^n$, FÖR $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

(*) FÖRST VISAR VI ATT <u>OM</u> $a_n = 2^n$ FÖR $n = 0, 1, 2, \ldots, \underline{k}$

DÅ GÄLLER ATT $a_n = 2^n$ FÖR $n = 0, 1, 2, \ldots, k, \underline{k+1}$:

ANTAG ATT $a_n = 2^n$ FÖR $n = 0, 1, 2, \ldots, k$.

ENLIGT (i) SÅ GÄLLER DÅ

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 3 \cdot a_k - 2 \cdot a_{k-1} && \text{(ENLIGT (i))} \\
&= 3 \cdot 2^k - 2 \cdot 2^{k-1} && \text{(ENLIGT ANTAGANDE)} \\
&= 3 \cdot 2^k - 2^k \\
&= (3-1) \cdot 2^k \\
&= 2 \cdot 2^k \\
&= 2^{k+1}
\end{aligned}
$$

D.V.S. $a_{k+1} = 2^{k+1}$ SÅ $a_n = 2^n$ FÖR $n = 0, 1, 2, \ldots, k, k+1$, VILKET SKULLE VISAS.

EFTERSOM ATT VI VET ATT $a_0 = 2^0$ OCH $a_1 = 2^1$ SÅ <u>BEVISAR</u> (*) ATT $a_2 = 2^2$. OM VI TILLÄMPAR (*) EN GÅNG TILL SÅ HAR VI <u>BEVISAT</u> ATT $a_3 = 2^3$. VI KAN UPPREPA DETTA ARGUMENT HUR MÅNGA GÅNGER SOM HELST. D.V.S. VI HAR SÅLEDES <u>BEVISAT</u> ATT $a_n = 2^n$ FÖR $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. □

FIBONACCI TALEN

DEFINIERA FIBONACCI TALEN ENLIGT

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

(1) $$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\dots$$

VISA ATT F_n UPPFYLLER

(2) $$F_n = \frac{a^n - (-a)^{-n}}{\sqrt{5}}, \qquad \text{DÄR} \quad a := \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

FÖR $n = 0,1,2,3,\dots$. (TALET a ÄR DET S.K. "GYLLENE SNITTET".)

BEVIS: ANVÄND INDUKTION.

BASFALL: $n=0$ OCH $n=1$ (P.G.A. ATT H-L I (1) TVÅ OLIKA TERMER.)

$$\frac{a^0 - (-a)^{-0}}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0 \qquad \text{ok!}$$

$$\frac{a^1 - (-a)^{-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{(\sqrt{5}+1)^2 + 4}{2(\sqrt{5}+1)}}{\sqrt{5}} = \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1 + 4}{2\sqrt{5}\,(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}+10}{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)} = \frac{2\sqrt{5}+10}{2\cdot 5 + 2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}+10}{2\sqrt{5}+10} = 1 \qquad \text{ok!}$$

GÖR INDUKTIONSANTAGANDET ATT (2) GÄLLER FÖR $n = 0,1,\dots,p$. DÅ

$$F_{p+1} = F_p + F_{p-1} \qquad \text{(ENLIGT (1))}$$

$$= \frac{a^p - (-a)^{-p}}{\sqrt{5}} + \frac{a^{p-1} - (-a)^{-(p-1)}}{\sqrt{5}} \qquad \text{(ENLIGT INDUKTIONSANTAG.)}$$

(3) $$= \frac{a^p + a^{p-1} - \left((-a)^{-p} + (-a)^{-(p-1)}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{a^{p-1}(a+1) - (-a)^{-(p-1)}\left((-a)^{-1}+1\right)}{\sqrt{5}}$$

LÄGG NU MÄRKE TILL ATT

$$a^2 = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{2^2} = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{2\sqrt{5}+6}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

$$a+1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+1+2}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

D.V.S $a^2 = a+1$.

DETTA GER ÄVEN

$$(-a)^{-1}+1 = -\frac{1}{a}+1 = \frac{a-1}{a} = \frac{a(a-1)}{a\cdot a} = \frac{a^2-a}{a^2} = \frac{a+1-a}{a^2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{(-a)^2} = (-a)^{-2}$$

SÄTT IN I (3):

$$F_{p+1} = \frac{a^{p-1}\cdot a^2 - (-a)^{-(p-1)}\cdot(-a)^{-2}}{\sqrt{5}} \qquad \left(\begin{array}{c} a^2=a+1 \\ (-a)^{-1}+1 = (-a)^{-2} \end{array}\right)$$

$$= \frac{a^{p+1} - (-a)^{-(p+1)}}{\sqrt{5}}$$

VILKET VISAR ATT INDUKTIONSANTAGANDET MEDFÖR ATT (2) ÄVEN GÄLLER FÖR $n=p+1$.

INDUKTIONSPRINCIPEN MEDFÖR ATT (2) SÅLEDES GÄLLER FÖR ALLA $n=0,1,2,3,\ldots$. $\square$

TORNEN I HANOI

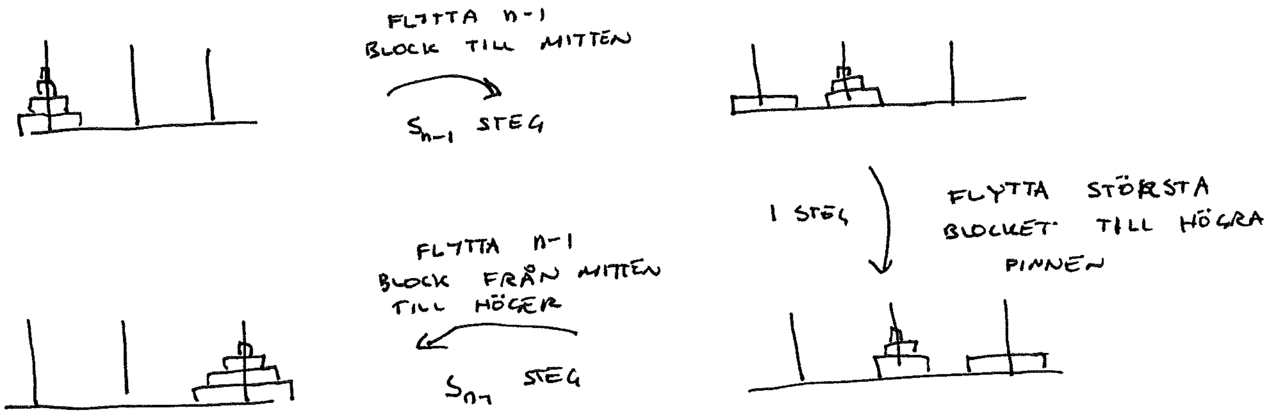
LÅT S_n BETECKNA DET MINSTA ANTAL STEG SOM KRÄVS FÖR ATT LÖSA "TORNEN I HANOI" MED n BLOCK. VISA ATT

(1) $$S_n = 2^n - 1$$

FÖR $n = 1, 2, 3, \ldots$.

BEVIS: HITTA FÖRST ETT SAMBAND MELLAN S_n OCH S_{n-1}:

ANTAG ATT VI REDAN KÄNNER S_{n-1}, DÅ KAN VI LÖSA PROBLEMET FÖR n GENOM ATT



KLART!

D.V.S. DET TAR $S_{n-1} + 1 + S_{n-1}$ STEG ATT LÖSA PROBLEMET MED n BLOCK:

(2) $$S_n = S_{n-1} + 1 + S_{n-1} = 2S_{n-1} + 1$$

VIDARE ÄR DET LÄTT ATT INSE ATT $S_1 = 1$.

NU BEVISAR VI (1) M.H.A. INDUKTION.

BASFALL: $n = 1$

$$2^1 - 1 = 1 \quad \text{ok!}$$

GÖR INDUKTIONSANTAGANDET ATT (1) GÄLLER FÖR $n = 1, \ldots, p$, DÅ:

$$S_{p+1} = 2S_p + 1 \qquad \text{(ENLIGT (2))}$$
$$= 2 \cdot (2^p - 1) + 1 \qquad \text{(ENLIGT INDUKTIONSANTAGANDET)}$$
$$= 2^{p+1} - 2 + 1 = 2^{p+1} - 1$$

ALLTSÅ GÄLLER (1) ÄVEN FÖR $n = p+1$.

INDUKTIONSPRINCIPEN MEDFÖR ATT (1) GÄLLER FÖR <u>ALLA</u> $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\square$

VARFÖR BASFALLET ÄR VIKTIGT.

LÅT OSS VISA ATT

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(2n+1)^2}{8}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

OBS! EJ SANT!

GENOM ATT "GLÖMMA" BASFALLET.

BEVIS (FELAKTIGT!):

GÖR INDUKTIONSANTAGANDET ATT

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(2n+1)^2}{8} \quad \text{FÖR } n = 1, 2, \ldots, p$$

DÅ GÄLLER

$$\sum_{k=1}^{p+1} k = (p+1) + \sum_{k=1}^{p} k$$

$$= p+1 + \frac{(2p+1)^2}{8} \quad (\text{ENLIGT ANTAGANDE})$$

$$= \frac{8(p+1)}{8} + \frac{4p^2+4p+1}{8}$$

$$= \frac{4p^2+12p+9}{8}$$

$$= \frac{(2p+3)^2}{8}$$

$$= \frac{(2(p+1)+1)^2}{8}$$

SÅ (*) GÄLLER ÄVEN FÖR $n = p+1$. $\square$

OBS! OM VI UTFÖR BASFALLET $n=1$ SER VI ATT

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \quad \text{MEN} \quad \frac{(2\cdot 1+1)^2}{8} = \frac{9}{8}$$

SÅ BASFALLET ÄR FALSKT (TY $1 \neq \frac{9}{8}$).

VISA ATT DEN ARITMETISKA SUMMAN KAN BERÄKNAS MED FORMELN

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

FÖR $n = 1, 2, 3, \ldots$.

BEVIS: ANVÄND INDUKTION.

BASFALLET $n=1$ ÄR

V-L: $\sum_{k=1}^{1} k = 1$

H-L: $\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$

SÅ $(*)$ GÄLLER DÅ $n=1$.

GÖR INDUKTIONSANTAGANDET ATT $(*)$ GÄLLER FÖR $n = 1, \ldots, p$, DÅ:

$$\sum_{k=1}^{p+1} k = (p+1) + \sum_{k=1}^{p} k$$ (SKRIV HÖGSTA TERMEN FÖR SIG)

$$= p+1 + \frac{p \cdot (p+1)}{2}$$ (ENLIGT INDUKTIONSANTAGANDET)

$$= \frac{2(p+1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2}$$

$$= \frac{2(p+1) + p(p+1)}{2}$$

$$= \frac{(p+1) \cdot (2+p)}{2}$$

$$= \frac{(p+1) \cdot ((p+1)+1)}{2}$$

D.V.S. DÅ GÄLLER $(*)$ FÖR $n=p+1$ OCKSÅ. ENLIGT INDUKTIONSPRINCIPEN FÖLJER ATT $(*)$ GÄLLER FÖR ALLA n. □

VISA ATT (*) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2^{n+1} \cdot (n-1) + 2$, FÖR $n = 1, 2, 3, \dots$.

BEVIS: VI ANVÄNDER INDUKTION.

GÖR INDUKTIONSANTAGANDET ATT (*) GÄLLER FÖR $n = 1, \dots, p$, FÖR NÅGOT p. DÅ

$$\sum_{k=1}^{p+1} k \cdot 2^k = (p+1) \cdot 2^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} k \cdot 2^k$$

(SKRIVA SISTA SUMMATERMEN SEPARAT)

$$= (p+1) \cdot 2^{p+1} + 2^{p+1} \cdot (p-1) + 2$$

(ENLIGT ANTAGANDE)

$$= p \cdot 2^{p+1} + \cancel{2^{p+1}} + 2^{p+1} \cdot p - \cancel{2^{p+1}} + 2$$

$$= 2 \cdot p \cdot 2^{p+1} + 2$$

$$= 2^{(p+1)+1} \cdot ((p+1)-1) + 2$$

VILKET VISAR ATT DÅ GÄLLER (*) ÄVEN FÖR $n = p+1$.

BASFALLET FÖR INDUKTIONEN $n=1$ ÄR

$$\left.\begin{aligned} &\text{V-L: } \sum_{k=1}^{1} k \cdot 2^k = 1 \cdot 2^1 = 2 \\ &\text{H-L: } 2^{1+1} \cdot (1-1) + 2 = 2 \end{aligned}\right\} \text{ BASFALLET ÄR SANT}$$

ENLIGT INDUKTIONSPRINCIPEN GÄLLER SÅLEDES (*) FÖR ALLA $n \geq 1$. $\square$