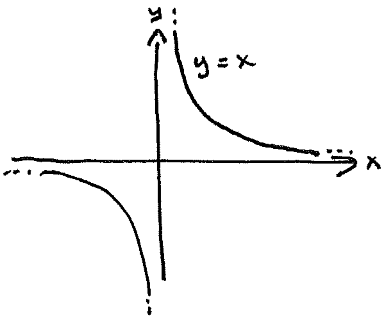
KAP. 1.5

$\boxed{1.51}$ RITA KURVOR :

a) $y = \frac{1}{x}$

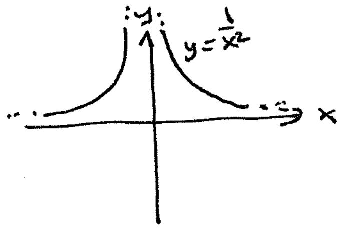
$x>0$: DÅ $x \to 0$ SÅ $y \to \infty$. DÅ $x \to \infty$ SÅ $y \to 0$.
VIDARE SER VI ATT y MINSKAR DÅ x ÖKAR SÅ LUTNINGEN PÅ KURVAN ÄR NEGATIV.

$x<0$: KURVAN SER LIKADAN UT SOM DÅ $x>0$ MEN MED ETT MINUSTECKEN FRAMFÖR $y = -\frac{1}{|x|}$ $(x<0)$ SÅ KURVAN FÖR $x<0$ ÄR SPEGLAD I X-AXELN.



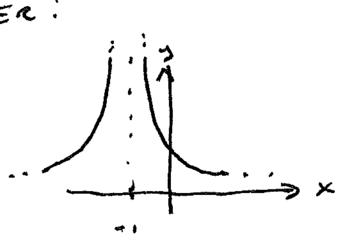
b) $y = \frac{1}{x^2}$

SER "UNGEFÄR" UT SOM a) MEN NU ÄR $y>0$ FÖR ALLA x (ÄVEN DÅ $x<0$) SÅ



d) $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

PRECIS SOM b) MEN GRAFEN ÄR FÖRSKJUTEN MED 1 TILL VÄNSTER!



KAP. 1.6

1.53 FÖRENKLA

a) $$\frac{3^2 \cdot 2^4}{6^3} = \frac{3^2 \cdot 2^4}{(2\cdot 3)^3} = \frac{3^2 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3^3} = 3^{2-3} \cdot 2^{4-3} = 3^{-1} \cdot 2^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

c) $$\left(\sqrt{64}\right)^{2/3} = \left(64^{1/2}\right)^{2/3} = 64^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = 64^{1/3} = \left(2^6\right)^{1/3} = 2^{6/3} = 2^2 = \underline{\underline{4}}$$

e) $$2^{(2^3)} = 2^8 = \underline{\underline{256}}$$

1.54 FÖRENKLA

b) $$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a \cdot a^{1/2}}{(a^2)^{1/3}} = \frac{a^{1+1/2}}{a^{2/3}} = \frac{a^{3/2}}{a^{2/3}} = a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{9-4}{6}} = \underline{\underline{a^{5/6}}} \qquad (\text{om } a>0)$$

d) $$\frac{\sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}}{\sqrt[8]{1/a}} = \frac{(a^3 \cdot a^{1/2})^{1/4}}{(a^{-1})^{1/8}} = \frac{\left(a^{3+\frac{1}{2}}\right)^{1/4}}{a^{-1/8}} = a^{1/8} \cdot \left(a^{7/2}\right)^{1/4} = a^{1/8} \cdot a^{7/8} = a^{\frac{1}{8}+\frac{7}{8}} = a^1 = \underline{\underline{a}}$$

(om $a>0$)

f) $$\left(ab\sqrt[4]{a^3/\sqrt{b\sqrt{b}}}\right)^2 = \left(ab \cdot \left[\frac{a^3}{(b \cdot b^{1/2})^{1/2}}\right]^{1/4}\right)^2 = (ab)^2 \cdot \left[\frac{a^3}{(b^{3/2})^{1/2}}\right]^{1/2}$$

$$= (ab)^2 \cdot \frac{a^{3/2}}{b^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} = a^2 \cdot b^2 \cdot a^{3/2} \cdot b^{-3/8} = a^{2+\frac{3}{2}} \cdot b^{2-\frac{3}{8}}$$

$$= \underline{\underline{a^{7/2} \cdot b^{13/8}}}$$

1.61 FÖRENKLA:

a) $3^x + 3^{x+1} = 3^x + 3^x \cdot 3 = 3^x \cdot (1+3) = \underline{\underline{4 \cdot 3^x}}$

d) $\frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{x+1}} = \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^x \cdot e} = \frac{1}{e^x} \cdot \left(1 + \frac{1}{e}\right)$

$= \frac{1}{e^x} \cdot \frac{e+1}{e} = \frac{1}{e^{x+1}} \cdot (e+1) \quad \left(= (1+e) \cdot e^{-(x+1)} \right)$

1.63 LÖS EKVATIONEN:

a)

$2^x \cdot 3^{x-2} = 4$

$2^x \cdot 3^x \cdot 3^{-2} = 4$

$(2 \cdot 3)^x = 4 \cdot 3^2$

$6^x = 36$

$x = 2$

SVAR: $x = 2$

b)

$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

$2^x \cdot 2^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ LÅT $y := 2^x$

$y^2 - 6y + 8 = 0$

$(y-3)^2 - 3^2 + 8 = 0$

$(y-3)^2 = 1$

$y = 3 \pm 1$

OM $y = 2$ DÅ $x = 1$ $(2^1 = 2)$

OM $y = 4$ DÅ $x = 2$ $(2^2 = 4)$

SVAR: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

KAP. 1.8

$\boxed{1.82}$ $f(x) = x^2+1$, $g(x) = ax+b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

BESTÄM a, b SÅ ATT $f \circ g(x) = g \circ f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

OBS! SYMBOLEN "$\circ$" BETYDER SAMMANSÄTTNING, SÅ

(i) $f \circ g(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 1 = (ax+b)^2 + 1$

(ii) $g \circ f(x) = g(f(x)) = af(x) + b = a(x^2+1) + b$

LÖS EKV. (i) = (ii):

(iii)' $(ax+b)^2 + 1 = a(x^2+1) + b$

$a^2x^2 + 2abx + b^2 + 1 = ax^2 + a + b$

(iii) $(a^2 - a)x^2 + 2abx + b^2 + 1 - a - b = 0$

VI SÖKER a OCH b SÅ ATT (iii) GÄLLER FÖR ALLA $x \in \mathbb{R}$.
DET BETYDER ATT VI KAN SÄTTA IN OLIKA VÄRDEN ~~FÖR~~ x
OCH PÅ SÅ SÄTT FÅ NYA EKVATIONER SOM GER SAMBAND
MELLAN a OCH b.

SÄTT IN $x = 0$:

$b^2 + 1 - a - b = 0 \implies a = b^2 - b + 1$ (iv)

SÄTT IN $x = 1$ (OCH ANVÄND (iv)):

(v) $a^2 - a + 2ab = 0$

SÄTT IN $x = -1$ (OCH ANVÄND (iv))

(vi) $a^2 - a - 2ab = 0$

ADDERA (v) OCH (vi)

$a^2 - a + 2ab + a^2 - a - 2ab = 0 \implies 2(a^2 - a) = 0 \implies a^2 - a = 0$ (vii)

$\implies a = 1$ ELLER $a = 0$

SÄTT IN (IV) OCH (vii) I (iii):

$$2abx = 0$$

SÅLEDES OM $a=1$ SÅ MÅSTE $b=0$ (FÖR EKV. SKA GÄLLA $\forall x$).

OM $a=0$ SÅ GER (iii)' ATT:

$$b^2+1 = b \Rightarrow b^2-b+1=0 \Rightarrow \left(b-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}+1=0$$

$$\Rightarrow \left(b-\tfrac{1}{2}\right)^2 = -\tfrac{3}{4}$$

MEN V-L I SISTA EKV. ÄR ≥ 0 OCH H-L ÄR <0 SÅ DENNA EKVATION SAKNAR LÖSNING.

SVAR: $a=1$, $b=0$

$\boxed{1.87}$ BESTÄM INVERS:

b) $f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$

f ÄR INTE INJEKTIV VILKET KAN SES GENOM ATT TESTA SIG FRAM, T.EX. SÅ

$$f(-1) = |-1| = 1 = |1| = f(1)$$

SVAR: f SAKNAR INVERS.

d) $f(x) = x^2 + 4x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$

f ÄR INTE INJEKTIV VILKET KAN VISAS GENOM ATT HITTA TVÅ TAL $x_1 \neq x_2$ S.A. $f(x_1) = f(x_2)$. FÖR ATT HITTA SÅDANA TAL KAN VI T.EX. LÖSA EKVATIONEN

$$x^2 + 4x + 5 = a \qquad (a \text{ ÄR EN KONSTANT})$$

$$(x+2)^2 - 4 + 5 = a$$

$$(x+2)^2 = a - 1$$

$$x = -2 \pm \sqrt{a-1}$$

T.EX. OM $a = 2$ SÅ KAN VI SÄTTA $x_1 = -2+1 = -1$, $x_2 = -2-1 = -3$

OCH $f(-1) = 1 - 4 + 5 = 2$, $f(-3) = 9 - 12 + 5 = 2$.

SVAR: f SAKNAR INVERS

f) $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}, \quad x > 0$

FÖR ATT BESTÄMMA INVERS LÖSER VI UT X FRÅN EKVATIONEN

$$y = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

$$y^2 = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} = y^2 - 1$$

$$x = \frac{1}{y^2 - 1}$$

FRÅN DETTA LÄSER VI AV ATT $f^{-1}(y) = (y^2-1)^{-1}, \quad y > 0$.

(KONTROLL:

$$f(f^{-1}(y)) = f\left((y^2-1)^{-1}\right) = \sqrt{1 + y^2 - 1} = \sqrt{y^2} = |y| = y \quad (y > 0!)$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right)^{-1} = x \text{)}$$

SVAR: $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y^2 - 1}, \quad y > 0$.