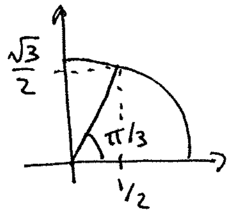
A.27 BERÄKNA $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$

SKRIV OM PÅ POLÄR FORM:

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2} \\ \sin\frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$$



VILKET GER

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = \left(e^{i\pi/3}\right)^{100} = e^{i\,100\pi/3}$$

$$= e^{i\cdot 2(50\pi/3)} = e^{i\,2\cdot(3\cdot 16+2)\pi/3} = e^{i\,4\pi/3}\cdot e^{i\cdot 16\cdot 2\pi}$$

$$= e^{i\,4\pi/3}$$

SVAR: $e^{i4\pi/3}$ $\left(= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

A.36 $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

DÅ GÄLLER

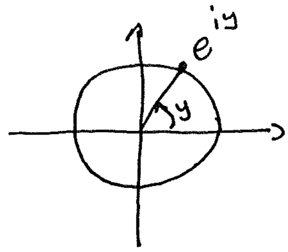
$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x|\cdot|e^{iy}| = |e^x|\cdot|\cos y + i\sin y|$$

$$= |e^x|\cdot\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = |e^x|$$

OBS! e^{iy} ÄR EN PUNKT MED REALDEL $\cos y$ OCH IMAGINÄRDEL $\sin y$. D.V.S. e^{iy} LIGGER PÅ ENHETSCIRKELN (DÄRAV $|e^{iy}| = 1$, EFTERSOM ALLA PUNKTER PÅ ENHETSCIRKELN LIGGER PÅ AVSTÅNDET 1 FRÅN ORIGO.).

ALLTSÅ ÄR $\arg z = y$ EN LÖSNING.

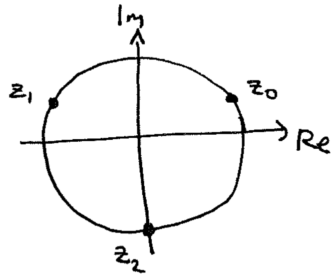
(ALLA LÖSNINGAR GES AV $\arg z = y + k\cdot 2\pi$. $(k\in\mathbb{Z})$)



$\boxed{\text{A.41}}$ LÖS EKVATIONEN:

a) $z^3 = i \iff re^{3i\theta} = e^{i\pi/2} \iff \begin{cases} r=1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \end{cases}$

$\iff \begin{cases} r=1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{2\pi}{3} \end{cases}$



SVAR: $z_0 = e^{i\pi/6}$, $z_1 = e^{i5\pi/6}$, $z_2 = -i$

d) $z^3 = i\sqrt{3} - 1$

SKRIV $i\sqrt{3}-1$ PÅ POLÄR FORM: $i\sqrt{3} - 1 = s\cdot e^{it}$

$s = |i\sqrt{3}-1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$ (OBS! $s>0$!)

$t = \arg(i\sqrt{3}-1) = \pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$

HITTA x S.A. $\tan x = \sqrt{3}$

$\sqrt{3} = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x = \frac{\pi}{3}$ GER $\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, OK!

D.V.S. $t = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

VI HAR $i\sqrt{3} - 1 = 2\cdot e^{i2\pi/3}$. LÖS NU DEN URSPRUNGLIGA EKV.!

$(re^{i\theta})^3 = r^3e^{3i\theta} = 2\cdot e^{i2\pi/3}$

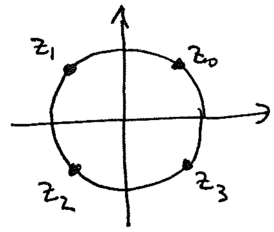
$\Rightarrow \begin{cases} r^3 = 2 \\ 3\theta = \frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2^{1/3} \\ \theta = \frac{2\pi}{9} + k\cdot\frac{2\pi}{3} \end{cases}$ (OBS! $r>0$!)

SVAR: $z_0 = 2^{1/3}\cdot e^{i2\pi/9}$, $z_1 = 2^{1/3}\cdot e^{i8\pi/9}$, $z_2 = 2^{1/3}\cdot e^{i14\pi/9}$

f) $z^4 = -1 \Rightarrow r^4e^{4i\theta} = e^{i\pi} \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ 4\theta = \pi + k\cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2} \end{cases}$

SVAR: $z_0 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{i5\pi/4}$

$z_1 = e^{i3\pi/4}$, $z_3 = e^{i7\pi/4}$



$\boxed{A.44}$ OM $p(x)$ HAR FAKTORN $x-1$ SÅ ÄR $+1$ EN ROT $(p(1)=0)$. DETTA GER:

$$0 = p(1) = 1 - 2 - 19 + a = -20 + a \implies a = 20$$

FAKTORISERA NU POLYNOMET. EFTERSOM ATT $x-1$ ÄR EN FAKTOR FÅR VI ATT $p(x) = (x-1)\cdot p_1(x)$ DÄR p_1 FÅS FRÅN POLYNOMDIVISION:

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x - 20 \\ \hline x-1 & x^3 - 2x^2 - 19x + 20 \\ & -(x^3 - x^2) \\ \hline & -x^2 - 19x + 20 \\ & -(-x^2 + x) \\ \hline & -20x + 20 \\ & -(-20x + 20) \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\implies p(x) = (x-1)\cdot(x^2 - x - 20)$$

FORTSÄTT GENOM ATT FAKTORISERA POLYNOMET $x^2 - x - 20$, D.V.S. SÖK DESS RÖTTER:

$$x^2 - x - 20 = 0 \implies \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} - 20 = 0$$

$$\implies \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} \implies x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ x_2 = -\frac{8}{2} = -4 \end{cases}$$

D.V.S. $x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4)$

SVAR: $p(x) = (x-1)(x-5)(x+4)$, $a = 20$

$\boxed{A.46}$ OM P ÄR ETT SJÄTTEGRADS-POLYNOM MED REELLA KOEFFICIENTER OCH P HAR $2-i$ SOM ROT, SAMT i SOM DUBBELROT

SÅ:

i) $\overline{2-i} = 2+i$ ÄR EN ROT

ii) $\overline{i} = -i$ ÄR EN DUBBELROT

D.V.S.

$$P(z) = (z-(2-i))\cdot(z-(2+i))\cdot(z-i)^2\cdot(z+i)^2\cdot q(z)$$

MEN q KAN INTE HA NÅGRA RÖTTER TY DÅ SKULLE P HA GRAD 7 ELLER HÖGRE, SÅ $q(z) = z_0$ KONSTANT.

VI SKULLE HITTA <u>NÅGOT</u> GRAD 6 POLYNOM SÅ VÄLJ $z_0 = 1$ TY DETTA ÄR DEN "ENKLASTE" KONSTANTEN. DÅ BLIR

$$P(z) = (z-(2-i))\cdot(z-(2+i))\cdot(z-i)^2\cdot(z+i)^2$$

$\boxed{1.112}$ VISA ATT $\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)$

VI RÄKNAR "BAKLÄNGES":

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\cancel{\sin\frac{\pi}{4}}\cdot\cos\frac{\theta}{2} - \cancel{\cos\frac{\pi}{4}}\cdot\sin\frac{\theta}{2}}{\cancel{\cos\frac{\pi}{4}}\cdot\cos\frac{\theta}{2} + \cancel{\sin\frac{\pi}{4}}\cdot\sin\frac{\theta}{2}}\right]^2$$

(ADDITIONSSATS FÖR sin OCH cos)

$$= \left[\frac{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}}\right]^2$$

$\left(\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1 - 2\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}}{1 + 2\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}}$$

(TRIG. ETTAN)

$$= \frac{1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

(ADDITIONSSATS FÖR sin)

$$= \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

VILKET SKULLE VISAS. $\square$

$\boxed{1.127}$ VISA ATT: $\arctan \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \arctan \frac{12}{5}$

LÅT $a = \arctan \frac{2}{3}$, $b = \arctan \frac{12}{5}$.

VI VILL VISA ATT $2a = b$.

VI BÖRJAR MED ATT VISA ATT $\tan 2a = \tan b$:

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{2 \sin a \cdot \cos a}{\cos^2 a - \sin^2 a} = \frac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a} =$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{1 - (\frac{2}{3})^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\tan b = \frac{12}{5}$$

D.V.S. $\tan 2a = \tan b$. (OBS! $\tan(\arctan x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$!)

EFTERSOM ATT tan ÄR π - PERIODISK MEDFÖR DETTA ATT

(*) $2a = b + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

MEN $a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ OCH $b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (OBS! $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$!)

SÅ (*) MEDFÖR ATT $2a = b$ (k MÅSTE VARA NOLL). $\square$