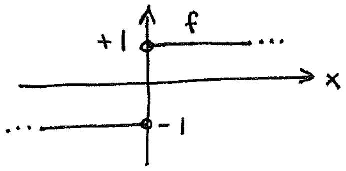
$\boxed{2.1}$ SKISSERA GRAFEN TILL f, BERÄKNA $\lim_{x\to\infty} f(x)$

f) $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$

OM $x > 0$ DÅ $f(x) = \frac{x}{x} = 1$, OM $x < 0$ DÅ $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$.

UPPENBARLIGEN $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

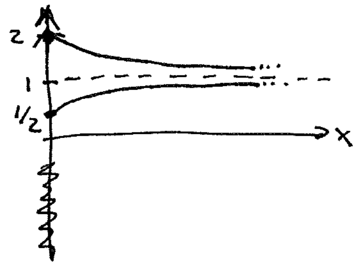


$\boxed{2.2}$ f UPPFYLLER $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $x \geq 0$, DÄR

$$g(x) = \frac{x+1}{x+2}, \quad h(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

a) SKISSERA g OCH h:S GRAFER.

KOLLA BETEENDE I ÄNDPUNKTERNA:



$$g(0) = \frac{1}{2}, \quad h(0) = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{g(x)} = 1$$

SÅ g BÖRJAR I $\frac{1}{2}$ OCH NÄRMAR SIG 1. HUR SER DEN UT DÄREMELLAN? ÄR DEN VÄXANDE? JA, TY

$$g(x) = \frac{x+1}{x+2} = \frac{(x+2)-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}$$ OCH $\frac{1}{x+2}$ ÄR AVTAGANDE!

DÅ $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ SER VI ATT h ÄR AVTAGANDE.

b) VI VET ATT

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \leq \lim_{x\to\infty} h(x) = 1$$

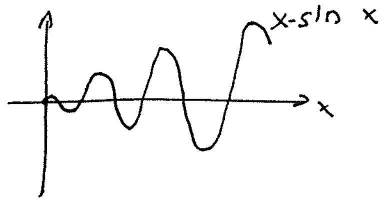
OCH

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \geq \lim_{x\to\infty} g(x) = 1$$

SÅ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. ($f$ ÄR "INSTÄNGD" MELLAN g OCH h.)

2.3 BERÄKNA GRÄNSVÄRDET:

c) $\lim_{x \to \infty} x \cdot \sin x$



x·sin x OSCILLERAR DÅ x VÄXER

SÅ GRÄNSVÄRDET EXISTERAR INTE.

ETT ANNAT SÄTT ATT VISA DETTA ÄR GENOM ATT LÅTA

$f(x) = x \cdot \sin x$. DÅ

(i) $f\left(\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right) = \left(\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right)\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right) = \frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \longrightarrow \infty, \quad k \to \infty$

(ii) $f\left(-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right) = \left(-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right)\cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right) = \frac{\pi}{2}-k\cdot 2\pi \longrightarrow -\infty, \quad k \to \infty$

SÅ $\lim_{x \to \infty} f(x)$ KAN EJ EXISTERA, TY OM DET GJORDE DET

SÅ $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ENLIGT (i), MEN $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ ENLIGT (ii).

UPPENBARLIGEN KAN INTE BÄGGE GÄLLA SAMTIDIGT.

$\boxed{2.5}$ BESTÄM KONSTANTERNA a, b SÅ ATT

$$\lim_{x \to 2} \frac{ax+b}{x^2-4} = 1$$

OBS! OM $x \to 2$ SÅ GÅR NÄMNAREN MOT 0 SÅ VI MÅSTE VÄLJA a, b SÅ ATT TÄLJAREN OCKSÅ GÅR MOT 0 (ANNARS KAN INTE GRÄNSVÄRDET VARA ÄNDLIGT). D.V.S.

$$a \cdot 2 + b = 0 \Rightarrow -2a = +b \Rightarrow ax+b = ax-2a = a(x-2)$$

EFTERSOM ATT $x^2-4 \to 0$ DÅ $x \to 2$ SÅ ÄR 2 EN ROT TILL $x^2-4=0$, SÅ VI KAN FAKTORISERA UT $(x-2)$. D.V.S.

$$x^2-4 = (x-2)\cdot(x+2) \quad \text{(KONJUGATREGELN!)}$$

TILLSAMMANS FÅR VI

$$\lim_{x \to 2} \frac{ax+b}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{a(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{a}{x+2} = \frac{a}{4}$$

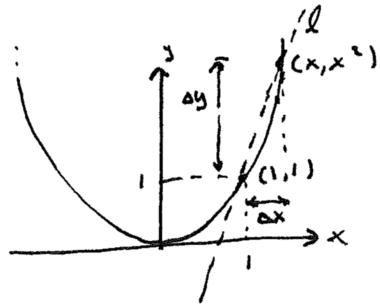
SÅ OM GRÄNSVÄRDET SKA BLI 1 SÅ MÅSTE VI HA

$$\frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = 4 \quad \text{OCH} \quad b = -2a = -8$$

SVAR: $a=4$, $b=-8$

$\boxed{2.6}$

a) ℓ LINJEN SOM SKÄR $y=x^2$ I $(1,1)$ OCH (x,x^2)



BESTÄM LUTNINGEN:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2-1}{x-1}$$

BESTÄM LUTNINGEN DÅ $x \longrightarrow 1$:

$$\lim_{x\to 1} k(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

b) ℓ LINJEN SOM SKÄR I (a,a^2) OCH (x,x^2).

LUTNING

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x+a$$

DÅ $x \longrightarrow a$:

$$\lim_{x\to a} k(x) = \lim_{x\to a} x+a = 2a$$

c) GEOMETRISKT SETT GER GRÄNSVÄRDET LUTNINGEN PÅ TANGENTEN I PUNKTEN $(1,1)$ FÖR (a) OCH I PUNKTEN (a,a^2) FÖR (b).

$\boxed{2.7}$ BERÄKNA GRÄNSVÄRDET:

c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$ (*)

LÅT $y = 5x$ FÖR ATT ÖVERFÖRA PÅ STANDARDGRÄNSVÄRDET $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$; OM $x \to 0$ SÅ $y = 5x \to 0$, SÅ:

$$(*) = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{3 \cdot \frac{y}{5}} = \frac{5}{3} \cdot \left(\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \right) = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}$ (**)

LÅT $y = \sin x$. OM $x \to 0$ SÅ $y \to 0$:

$$(**) = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = \underline{\underline{1}}$$

$\boxed{2.8}$ BERÄKNA GRÄNSVÄRDET:

e) $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x$

OBS! VIKTIGT ATT $x > 0$, ANNARS ÄR $\ln x$ EJ DEFINIERAT!

LÅT $y = \ln x$, SÅ $x = e^y$, OCH $x \to 0^+ \Rightarrow y \to -\infty$:

$$(e) = \underbrace{\lim_{y \to -\infty} e^y \cdot y}_{\text{STANDARDGRÄNSVÄRDE}} = \underline{\underline{0}}$$

h) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 3x}$

LÅT $y = 3x$, SÅ $x = \frac{y}{3}$ OCH $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$:

$$(h) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{y}{3}}{\sin y} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

2.16 BERÄKNA GRÄNSVÄRDET:

b) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1}\right)$

GRÄNSVÄRDE AV TYPEN "$\infty - \infty$", SKRIV OM:

$$\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1} = \frac{\left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{(x^2+3x) - (x^2+1)}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1}}$$ (KONJUGATREGELN)

$$= \frac{3x-1}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$ (BRYT UT x^2 UNDER ROTTECKNET. OBS! $x > 0$ SÅ $\sqrt{x^2} = x$!)

$$= \frac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$\longrightarrow \frac{3-0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{3}{2}$$ DÅ $x \to \infty$

SVAR: $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1}\right) = \frac{3}{2}$

c) $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1}\right)$

GÖR SAMMA OMSKRIVNING SOM OVAN

$$\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1} = \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{3x-1}{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

$$= \frac{3x-1}{-x \cdot \left(\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$ (OBS! $\sqrt{x^2} = -x$, TY $x < 0$!)

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{OM } x \geq 0 \\ -x, & \text{OM } x < 0 \end{cases}}$$

$$= \frac{-3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$\longrightarrow \frac{-3+0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = -\frac{3}{2}$$, DÅ $x \to -\infty$

SVAR: $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1}\right) = -\frac{3}{2}$