DEF. (GRÄNSVÄRDE)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

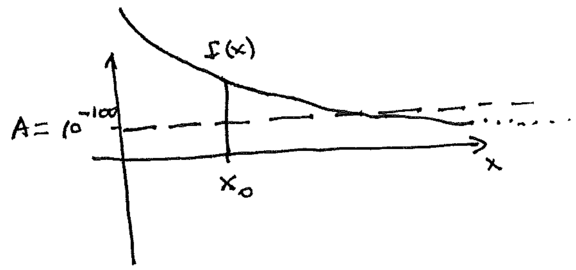
OM OCH ENDAST OM, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \omega$ S.A.

$$(*) \quad \left. \begin{array}{l} x > \omega \\ x \in D_f \end{array} \right\} \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

BETYDELSE: NÄR x ÄR STORT SÅ LIGGER $f(x)$ NÄRA KONSTANTEN A. $\forall \varepsilon > 0 \ldots$ BETYDER ATT HUR LITET ε ÄN ÄR SÅ KAN VI FÖRSÄKRA OSS OM ATT AVSTÅNDET MELLAN $f(x)$ OCH A ÄR MINDRE ÄN DETTA TAL GENOM ATT VÄLJA x TILLRÄCKLIGT STORT. ω BESTÄMMER HUR STORT x MÅSTE VARA.

EXEMPEL DÅ NÅGOT VILLKOR INTE HÅLLER:

1)



$$x > x_0 \implies |f(x) - A| < 10^{-100}$$

D.V.S. AVSTÅNDET MELLAN $f(x)$ OCH A ÄR PYTTELITET SÅ LÅNGE SOM $x > x_0$

MEN!

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \neq A$$

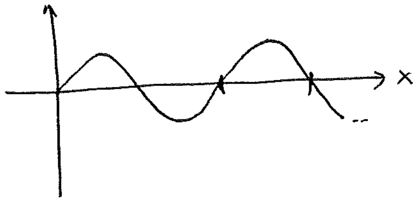
TY OM $\varepsilon = 10^{-10000}$ SÅ KAN VI INTE GARANTERA $|f(x) - A| < \varepsilon$ GENOM ATT VÄLJA x TILLRÄCKLIGT STORT.

HÄR SER VI ATT $(*)$ GÄLLER FÖR $\varepsilon = 10^{-100}$ MEN INTE FÖR $\varepsilon = 10^{-10000}$.

(DOCK GÄLLER $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$!)

EX (FORTS.)

2) $f(x) = \sin x$



$\forall \epsilon > 0$ SÅ KAN VI HITTA $x : |f(x)| < \varepsilon$

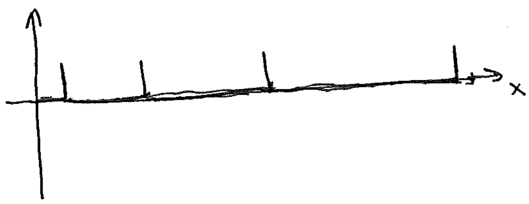
T.EX. $f(2\pi n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

MEN! VI KAN INTE HITTA ω SÅ ATT

$|f(x)| < \varepsilon$ FÖR ALLA $x > \omega$

T.EX. $f\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

3) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{OM } x = 2, 4, 8, 16, \ldots \\ 0, & \text{ANNARS} \end{cases}$



SAMMA PROBLEM SOM OVAN $|f(x)| = 0$ NÄSTAN ÖVERALLT MEN HUR STORT x ÄN BLIR SÅ FINNS DET NÅGON PUNKT DÄR $f(x) = 1$. VI KAN INTE HITTA ω S.A. $x > \omega \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ FÖR VARJE $\varepsilon > 0$.

BETYDELSE AV $x \in D_f$:

1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ D.V.S. f FUNKTION FRÅN $\{0,1,2,3,\ldots\}$ TILL REELLA TAL, DÅ BLIR (*)

$$\left.\begin{array}{l} x > \omega \\ x \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

f. SKRIVS SOM $\{x_n\}$, D.V.S. $f(n) = x_n$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} x_n = A$$

EXISTERAR OMM $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$:

$$n > N \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon$$

2) $x \to a$: HÄR ÄR TYPISKT ~~OM~~ ATT $f(x)$ EJ ÄR DEFINIERAD FÖR $x = a$

$$\left.\begin{array}{l} |x - a| < \delta \\ x \in D_f \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

BETYDER ALLTSÅ OM x NÄRA a MEN EJ LIKA MED a DÅ ÄR $f(x)$ NÄRA A.

VIKTIGT !

"$\lim_{x\to a} f(x) = A$" ELLER "$\lim_{x\to a} f(x)$ EXISTERAR"

BETYDER ATT A ÄR ETT TAL. (EJ $\pm\infty$!)

VI SÄGER OCKSÅ ATT $f(x)$ <u>KONVERGERAR</u> DÅ $x \to a$.

OM $f(x)$ INTE KONVERGERAR SÅ SÄGER VI ATT $f(x)$ <u>DIVERGERAR</u> DÅ $x \to a$. DETTA BETYDER ANTINGET ATT

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \left(\text{EL. } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty \right)$$

ELLER ATT

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ EJ EXISTERAR} \quad \left(\text{TYPEX. } \lim_{x\to\infty} \sin x \right)$$

DEF: (KONTINUITET)

f ÄR KONTINUERLIG I PUNKTEN a OM

(1) $\lim_{x \to a} f(x) = A$

D.V.S. GRÄNSVÄRDET EXISTERAR, OCH

(2) $A = f(a)$

D.V.S. f ÄR DEFINIERAD I a OCH GRÄNSVÄRDET SAMMANFALLER MED FUNKTIONSVÄRDET I PUNKTEN a.

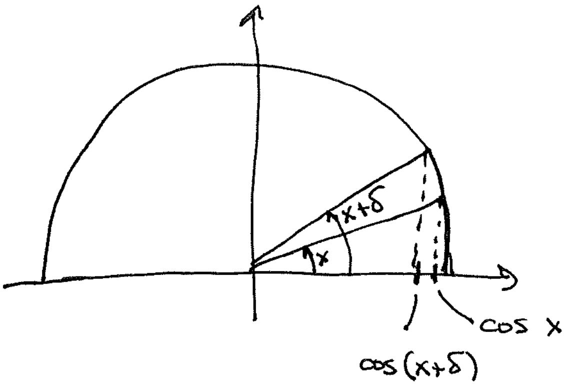
VIKTIGT FÖR OSS NÄR VI RÄKNAR GRÄNSVÄRDEN ÄR FÖLJANDE RÄKNEREGEL

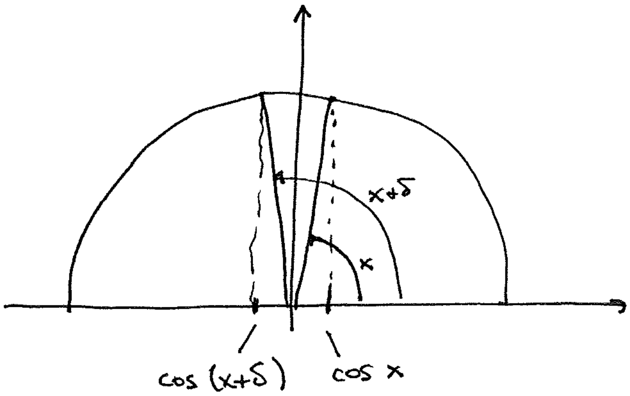
OM f KONTINUERLIG ~~OCH~~ OCH $\lim_{x \to a} g(x)$ EXISTERAR, DÅ

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

DETTA BEHÖVER INTE GÄLLA OM f EJ KONTINUERLIG!

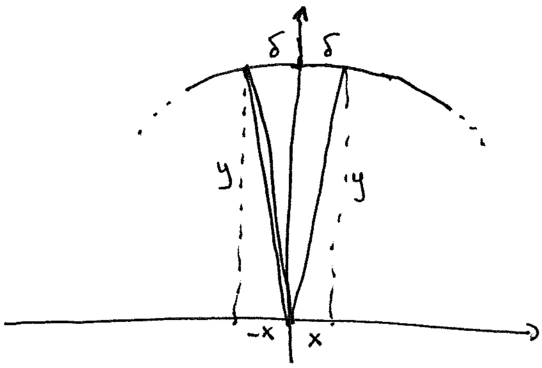
KONTINUITET





OM δ LITET SÅ ÄR $\cos x$ NÄRA $\cos(x+\delta)$

$\Longrightarrow$ COS ÄR KONTINUERLIG



$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) = \frac{y}{x}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right) = \frac{y}{-x}$$

OM $\delta > 0$ LITET SÅ ÄR $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) \gg 0$ (MYCKET STÖRRE ÄN) MEN $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right) \ll 0$. SÅ AVSTÅNDET MELLAN $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)$ OCH $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)$ ÄR STORT FÖR SMÅ δ. JU MINDRE δ ÄR DESTO STÖRRE BLIR AVSTÅNDET

$\Longrightarrow$ $\tan x$ ÄR EJ KONTINUERLIG I PUNKTEN $x = \frac{\pi}{2}$

RÄKNEREGLER FÖR GRÄNSVÄRDEN:

OM $\lim f(x)$ OCH $\lim g(x)$ EXISTERAR SÅ GÄLLER

1) $$\lim \left(f(x)+g(x)\right) = \left(\lim f(x)\right) + \left(\lim g(x)\right)$$

2) $$\lim \left(f(x)\cdot g(x)\right) = \left(\lim f(x)\right)\cdot\left(\lim g(x)\right)$$

3) $$\lim \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$ <u>OM</u> $\lim g(x) \neq 0$!

4) OM h ÄR KONTINUERLIG:

$$\lim h\left(f(x)\right) = h\left(\lim f(x)\right)$$