KS1 - 2007

1.

VISA MED GRÄNSVÄRDETS DEFINITION ATT

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

OBS! $x \to 0^+$ TY $\sqrt{x}$ EJ DEF. FÖR $x < 0$.

LÅT $\varepsilon > 0$ VARA GIVET. VI MÅSTE VISA ATT VI KAN VÄLJA TALET $\delta > 0$ S.A. OM $0 < x < \delta$ SÅ $\sqrt{x} < \varepsilon$.

I DETTA FALL ÄR DET GANSKA LÄTT ATT SE, OM $\delta = \varepsilon^2$ SÅ GÄLLER:

OM $x < \delta$ (OCH $x > 0$), DÅ $\sqrt{x} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$

ENLIGT DEF. SÅ BETYDER DETTA ATT $\sqrt{x} \to 0$, DÅ $x \to 0^+$.

KS1 - 2007
3.

VISA MED GRÄNSVÄRDETS DEFINITION ATT

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1$$

LÅT $\varepsilon > 0$ VARA GIVET. VI SKA VISA ATT VI KAN VÄLJA TALET $\delta > 0$ SÅ ATT OM $|x-1| < \delta$ SÅ ÄR $|x^2-1| < \varepsilon$.
(OBS! δ FÅR BERO PÅ ε, MEN INTE PÅ x.)

VI FÖRSÖKER UPPSKATTA $|x^2-1|$ I TERMER AV $|x-1|$ FÖR x NÄRA 1:

$$|x^2-1| = |(x+1)(x-1)| = |x+1| \cdot |x-1|$$

VAD KAN VI GÖRA MED TERMEN $|x+1|$? EN MÖJLIGHET ÄR ATT TÄNKA OM ~~XXXX~~ $|x-1| < 1$ DÅ ÄR $x < 2$ OCH SÅLEDES $|x+1| < |2+1| = 3$. SÅ ANTAG ATT $|x-1| < 1$, DÅ:

$$|x^2-1| = |x+1| \cdot |x-1| < 3 \cdot |x-1|$$

SÅ OM $|x-1| < \varepsilon/3$ ~~XX~~ OCH $|x-1| < 1$ DÅ GÄLLER

$$|x^2-1| < 3 \cdot |x-1| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

D.V.S. OM VI LÅTER $\delta = \min\{1, \varepsilon/3\}$, DÅ

$$|x-1| < \delta \implies |x^2-1| < \varepsilon$$

VILKET SKULLE VISAS.

TEN.
070108
3.

VISA MED HJÄLP AV GRÄNSVÄRDETS DEFINITION ATT:

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$$

LÅT $\varepsilon > 0$. VI SKA VISA ATT DET EXISTERAR ETT POSITIVT REELLT TAL K (SOM BEROR PÅ ε) SÅDANT ATT OM $x > K$ SÅ $e^{-x} < \varepsilon$.

SÖK K GENOM ATT LÖSA FÖLJANDE EKVATION:

$$e^{-x} = \varepsilon \iff \ln e^{-x} = \ln \varepsilon \iff -x = \ln \varepsilon$$

LÅT $K = -\ln \varepsilon$. OVANSTÅENDE UTRÄKNING VISAR ATT OM $x > K = -\ln \varepsilon$ SÅ $e^{-x} < \varepsilon$. ENLIGT DEFINITION AV GRÄNSVÄRDE VISAR DETTA ATT

$$\lim_{x \to 0} e^{-x} = 0.$$

TEN.
061106
6.

VISA MED GRÄNSVÄRDETS DEFINITION ATT

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/100} = 0$$

LÅT $\varepsilon > 0$ VARA GIVET. VI SKA VISA ATT DET EXISTERAR ETT HELTAL N (SOM BEROR PÅ ε) SÅ ATT, OM $n \geq N$ SÅ $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/100} \leq \varepsilon$.

VI SÖKER NU N GENOM ATT LÖSA FÖLJANDE EKVATION:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1/100} = \varepsilon \iff \frac{1}{n} = \varepsilon^{100} \iff n = \frac{1}{\varepsilon^{100}}$$

LÅT $N = \lceil \varepsilon^{-100} \rceil$ (D.V.S. AVRUNDA UPPÅT). OMANSTÅENDE RÄKNING VISAR ATT OM $n \geq N$ SÅ

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon^{100}}$$

OCH SÅLEDES

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1/100} \leq \varepsilon .$$

SAMMANFATTNINGSVIS SER VI ATT FÖLJANDE UTSAGA ÄR SANN:

OM $n \geq \frac{1}{\varepsilon^{100}}$ SÅ $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/100} \leq \varepsilon$, FÖR GODTYCKLIGT $\varepsilon > 0$.

ENLIGT DEFINITION BETYDER DET ATT

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/100} = 0$$

$\boxed{2.17}$ ÄR FUNKTIONEN KONTINUERLIG?

b)
$$h(x) := \begin{cases} \dfrac{2x^2-x-1}{x-1}, & \text{OM } x \neq 1 \\ 3, & \text{OM } x = 1 \end{cases}$$

VI SKA UNDERSÖKA OM $\lim_{x\to 1} h(x)$ EXISTERAR OCH ÄR 3.
FAKTORISERA TÄLJAREN (OBS! $2\cdot 1^2 - 1 - 1 = 0$, SÅ 1 ÄR EN ROT):

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1 \\ \hline x-1 & 2x^2-x-1 \\ & -(2x^2-2x) \\ \hline & x-1 \\ & -(x-1) \\ \hline & 0 \end{array} \implies 2x^2-x-1 = (x-1)(2x+1)$$

SÅLEDES, OM $x \neq 1$:

$$\frac{2x^2-x-1}{x-1} = \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = 2x+1 \longrightarrow 3, \quad \text{DÅ } x \to 1$$

VILKET VISAR BÅDE ATT $\lim_{x\to 1} h(x)$ EXISTERAR OCH ATT $\lim_{x\to 1} h(x) = 3$, SÅ h ÄR KONTINUERLIG I PUNKTEN $x = 1$.
DET ÄR UPPENBART* ATT h ÄR KONTINUERLIG I PUNKTER $x \neq 1$, SÅ h ÄR KONTINUERLIG.

<u>SVAR: JA</u>

(*) BEVIS:

OBS! DET HÄR ÄR SKRIVER MAN ALDRIG UT...

FUNKTIONERNA ~~[illegible]~~
$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -1, \quad f_3(x) = 2$$
ÄR KONTINUERLIGA, SÅLEDES ÄR
$$f_4(x) = f_3(x)\cdot f_1(x)\cdot f_1(x) + f_2(x)\cdot f_1(x) + f_2(x) \quad (= 2x^2-x-1)$$
OCH
$$f_5(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad (= x-1)$$
OCKSÅ KONTINUERLIGA; TY PRODUKTEN AV TVÅ KONT. FUNKTIONER ÄR KONT., SAMT SÅ ÄR SUMMAN AV TVÅ KONT. FUNKTIONER KONT.
SLUTLIGEN, OM $x \neq 1$ SÅ ÄR $f_5(x) \neq 0$, SÅ
$$\frac{f_4(x)}{f_5(x)} = \frac{2x^2-x-1}{x-1}$$
ÄR KONTINUERLIG; TY KVOTEN AV TVÅ KONT. FNKT. ÄR KONT. OM NÄMNAREN $\neq 0$.