$\boxed{2.11}$ BERÄKNA GRÄNSVÄRDET:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2} = \left(e^{1}\right)^{2} = \underline{\underline{e^{2}}}$$

$\uparrow$
(SATS 2 (7), S. 136)

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n^{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{2}$ (OK TY $n>0$!)

$= \left(\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}\right)^{2}$ (SATS 2(7), S. 136)

$= (1)^{2} = \underline{\underline{1}}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^{n}$

OBSERVERA ATT $2+\frac{1}{n} \geq 2$, SÅ $\left(2+\frac{1}{n}\right)^{n} \geq 2^{n}$ VILKET VÄXER OBEGRÄNSAT DÅ $n\to\infty$. SÅLEDES

$$\lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{2}\right)^{n} \geq \lim_{n\to\infty} 2^{n} = \infty$$

DEN ENDA MÖJLIGHETEN ÄR ATT $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^{n} = \infty$.

$\boxed{2.33}$ BERÄKNA

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ (VL DEFINIERAS ENL. GRÄNSV. I HL)

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n = -1 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= -1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= -1 + \frac{1 - (1/3)^{n+1}}{1 - 1/3}$$ (GEOMETRISK SUMMA)

$$= -1 + \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$= -1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad n \to \infty$$

SVAR: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2}$

HUR FORT VÄXER FUNKTIONER I FÖRHÅLLANDE TILL VARANDRA?

1) $$\frac{\ln x}{x^{\alpha}} \longrightarrow 0, \quad x \to \infty \qquad (\alpha > 0)$$

2) $$\frac{x^{\alpha}}{a^{x}} \longrightarrow 0, \quad x \to \infty \qquad (a > 1)$$

3) $$\frac{a^{n}}{n!} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

VI SÄGER ATT $\ln x$ VÄXER LÅNGSAMT OCH $n!$ VÄXER FORT.

FLER STANDARDGRÄNSVÄRDEN (MEMORERA!):

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} n^{1/n} = 1, \qquad \left(\lim_{n \to \infty} a^{1/n} = 1, \ a > 0 \quad \text{FÖLJER FRÅN KONT. AV } a^{x} \right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\boxed{2.36}$ BERÄKNA GRÄNSVÄRDE DÅ $x \to \infty$:

a) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \dfrac{\ln x}{x^{1/2}} \longrightarrow 0$ (STANDARD GRV.)

b) $\dfrac{\ln \sqrt{x}}{x} = \dfrac{\ln y}{y^2} \longrightarrow 0$

c) $\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x} = \sqrt{\dfrac{\ln x}{x^2}} \longrightarrow \sqrt{0} = 0$ ($x \mapsto \sqrt{x}$ ÄR KONT.!)

h) $\dfrac{\ln 3x}{\ln 2x} = \dfrac{\ln 3 + \ln x}{\ln 2 + \ln x} = \dfrac{\cancel{\ln x}\left(\overbrace{\frac{\ln 3}{\ln x}}^{\to 0} + 1\right)}{\cancel{\ln x}\left(\underbrace{\frac{\ln 2}{\ln x}}_{\to 0} + 1\right)} \longrightarrow 1$

i) $\ln 2x - \ln x = \ln 2 + \ln x - \ln x = \ln 2$

j) $\ln(2+x) - \ln x = \ln \dfrac{2+x}{x} = \ln\left(\dfrac{x\left(\frac{2}{x}+1\right)}{x}\right) = \ln\left(1 + \overbrace{2/x}^{\to 0}\right) \to \ln 1 = 0$

($\ln x$ ÄR KONT.!)

$\boxed{2.47}$

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+3x)}{x}}{\frac{\sin x}{x}} \overset{\lim}{=} \frac{3}{1} = \underline{\underline{3}}$$

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y/3} = 3 \right)$$

c) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^x + \ln x}{3\cdot 2^x - \ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{\ln x}\cdot\left(\overbrace{\frac{2^x}{\ln x}}^{\to 0} + 1\right)}{\cancel{\ln x}\cdot\left(\underbrace{\frac{3\cdot 2^x}{\ln x}}_{\to 0} - 1\right)} = \frac{+1}{-1} = \underline{\underline{-1}}$$

2.39 f ÄR DEFINIERAD FÖR $x>0$ OCH

$$\ln(1+x) \le f(x) \le \ln(1+2x), \qquad x>0$$

VAD KAN SÄGAS OM:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

EFTERSOM $\lim_{x\to\infty} \ln(1+x) = \infty$ SÅ MÅSTE ÄVEN $\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty}}$.

b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

BÅDE $\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x) = 0$ OCH $\lim_{x\to 0^+} \ln(1+2x) = 0$ SÅ

$\underline{\underline{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0}}$ LIKVÄL.

c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$

DÅ $f(x) \ge \ln(1+x)$ SÅ GÄLLER $\frac{f(x)}{x} \ge \frac{\ln(1+x)}{x}$ FÖR $x>0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{(STANDARDGRÄNSVÄRDE)}$$

SÅ $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \ge 1$ (OM GRÄNSVÄRDET EXISTERAR)

DÅ $f(x) \le \ln(1+2x)$ SÅ GÄLLER $\frac{f(x)}{x} \le \frac{\ln(1+2x)}{x}$ FÖR $x>0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \{y=2x\} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y/2} = 2$$

SÅ $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \le 2$ (OM GRÄNSVÄRDET EXISTERAR)

SVAR: $1 \le \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \le 2$ $\underline{\text{OM}}$ GRÄNSVÄRDET EXISTERAR.
(VI KAN INTE GÖRA NÅGOT UTTALANDE HURUVIDA GRÄNSV. EXISTERAR!)

$\boxed{2.37}$ LÅT α VARA VINKEL I ~~RADIANER~~ GRADER, LÅT x VARA SAMMA VINKEL FAST I RADIANER. DEFINIERA $\sin_0 \alpha := \sin x$.

BERÄKNA

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin_0 \alpha}{\alpha}$$

SAMBAND MELLAN GRADER OCH RADIANER GER $\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x$.

VI SER ATT OM $\alpha \to 0$ SÅ $x \to 0$. VARIABELBYTET GER

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin_0 \alpha}{\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\frac{180}{\pi} x} = \frac{\pi}{180} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}$$

SVAR: $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin_0 \alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{180}$

$\boxed{2.38}$ BERÄKNA (Pn OMKRETS AV REGELBUNDEN n-HÖRNING INSKRIVEN I CIRKEL MED RADIE r.)

$$\lim_{n\to\infty} P_n \quad \text{DÄR} \quad P_n = n \cdot 2 \cdot r \cdot \sin\frac{\pi}{n}$$

GÖR VARIABELBYTTET $x = \frac{\pi}{n}$. OM $n \to \infty$ SÅ $x \to 0$:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot 2 \cdot r \cdot \sin\frac{\pi}{n} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{x} \cdot 2 \cdot r \cdot \sin x$$

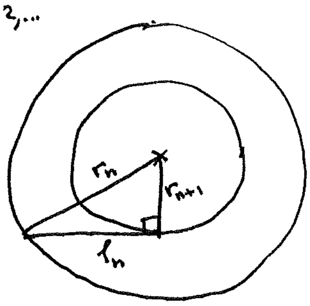
$$= \lim_{x\to 0} 2\pi r \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$= 2\pi r$$

SVAR: OMKRETSEN $P_n \longrightarrow 2\pi r$ DÅ $n \longrightarrow \infty$.

$\boxed{2.48}$

GIVET: $\frac{r_{n+1}}{r_n} = k$, $0<k<1$, $n=0,1,2,\dots$



BESTÄM k SÅ ATT

$$\sum_{i=0}^{\infty} l_i = 2\pi r_0$$

LÄNGDERNA l_i GES ENL. FIGUR AV:

$$l_i^2 = r_i^2 - r_{i+1}^2 = r_i^2\left(1-\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)^2\right) = r_i^2(1-k^2)$$

$$\Rightarrow l_i = r_i \cdot \sqrt{1-k^2} \qquad (l_i \text{ ÄR POSITIV!})$$

ENL. DEF.

$$\sum_{i=0}^{\infty} l_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} l_i$$

SUMMAN BLIR

$$\sum_{i=0}^{n} l_i = \sum_{i=0}^{n} r_i\sqrt{1-k^2} = \sqrt{1-k^2} \cdot (r_0 + r_1 + \dots + r_n)$$

$$= \sqrt{1-k^2} \cdot r_0 \cdot \left(1 + \frac{r_1}{r_0} + \frac{r_1}{r_0}\cdot\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_0}\cdot\frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{r_3}{r_2} + \dots \frac{r_1}{r_0}\cdots\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)$$

$$= r_0 \cdot \sqrt{1-k^2} \cdot (1 + k + k^2 + \dots + k^n)$$

$$= r_0 \cdot \sqrt{1-k^2} \cdot \sum_{i=0}^{n} k^i = r_0 \sqrt{1-k^2} \cdot \frac{1-k^{n+1}}{1-k}$$

$$\longrightarrow r_0 \cdot \sqrt{1-k^2} \cdot \frac{1}{1-k} \qquad \text{DÅ } n \to \infty \qquad (\text{OBS! } 0<k<1!)$$

VI VILL VÄLJA k SÅ ATT

$$2\pi r_0 = \sum_{i=0}^{\infty} l_i = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1-k} \cdot r_0$$

VILKET GER

$$2\pi = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1-k} = \frac{\sqrt{(1-k)(1+k)}}{\sqrt{(1-k)^2}} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \Rightarrow \frac{1+k}{1-k} = 4\pi^2$$

$$\Rightarrow 1+k = 4\pi^2(1-k) \Rightarrow k\cdot(1+4\pi^2) = 4\pi^2 - 1 \Rightarrow k = \frac{4\pi^2-1}{4\pi^2+1}$$

SVAR: $k = \frac{4\pi^2-1}{4\pi^2+1}$

DERIVATAN AV f I PUNKTEN x DEFINIERAS SOM

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a) BESTÄM DERIVATAN AV $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = \underline{\underline{2x}}$$

b) BESTÄM DERIVATAN AV $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $(x \neq -1\,!)$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{x+1 - (x+h+1)}{(x+h+1) \cdot (x+1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h \cdot (x+h+1)(x+1)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$= \frac{-1}{(x+1) \cdot (x+1)} = \underline{\underline{-\frac{1}{(x+1)^2}}}$$