$\boxed{3.2}$ BERÄKNA DERIVATAN

d) $f(x) = \ln x \,,\quad x > 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}\right]$$

$$= \left\{ k = \frac{x}{h} \right\} = \lim_{\underline{k\to\infty}!} \ln\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k/x}\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \ln\left[\left(\left[1+\frac{1}{k}\right]^{k}\right)^{1/x}\right] \underset{\uparrow}{=} \ln\left[\left(\lim_{k\to\infty}\left[1+\frac{1}{k}\right]^{k}\right)^{1/x}\right]$$

$t \mapsto \ln[t^{1/x}]$ ÄR KONT. FÖR FIXT x!

$$= \ln\left[e^{1/x}\right] = \frac{1}{x}$$

SVAR: $f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad (x > 0!)$

$\boxed{3.7}$ BESTÄM EKV. FÖR NORMAL + TANGENT

$\boxed{D(\cos x) = -\sin x}$

a) $y = \cos 2x$ I PUNKTEN $x_0 = \pi/6$

LINJENS EKV. FÖR LINJE SOM SKÄR PUNKTEN (x_0, y_0) MED RIKTNINGSKOEFFICIENT k GES AV:

$$y = y_0 + k \cdot (x - x_0)$$

I VÅRT FALL $y_0 = \cos(2x_0) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,

LUTNINGEN TILL TANGENTEN GES AV DERIVATAN I x_0:

(*) SE NEDAN $\quad y' = -\sin(2x) \cdot (2x)' = -\sin(2x) \cdot 2 \quad$ (KEDJEREGELN)

$$k = -2 \cdot \sin(2x_0) = -2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

LUTNINGEN TILL NORMALEN: $m = -\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

SVAR: $\begin{cases} \text{TANGENTEN: } & y = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ \text{NORMALEN: } & y = \frac{1}{2} + \frac{x - \pi/6}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$\boxed{D(\ln x) = \frac{1}{x},\ x > 0}$

b) $y = \ln x$ I PUNKTEN $x_0 = 2$

$y' = \frac{1}{x}$, $\quad k = \frac{1}{2}$, $\quad y_0 = \ln 2$, $\quad m = -\frac{1}{k} = -2$

SVAR: $\begin{cases} \text{TANGENTEN: } & y = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) \\ \text{NORMALEN: } & y = \ln 2 - 2(x - 2) \end{cases}$

DERIVATAN (*) KAN BERÄKNAS M.H.A. DEFINITIONEN SÅ HÄR:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(2(x+h)) - \cos 2x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos 2x \cdot \cos 2h - \sin 2x \cdot \sin 2h - \cos 2x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos 2x \cdot \frac{\cos 2h - 1}{h} - \sin 2x \cdot \frac{\sin 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \cos 2x \cdot \frac{-2\sin^2 h}{h} - \sin 2x \cdot \frac{\sin 2h}{h}$$

$$= -2 \cdot \cos 2x \cdot \left\{\lim_{h \to 0} \sin h\right\} \cdot \left\{\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}\right\} - \sin 2x \cdot \left\{\lim_{h \to 0} \frac{\sin 2h}{h}\right\}$$

$$= -2 \cdot \cos 2x \cdot 0 \cdot 1 - \sin 2x \cdot \left\{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t/2}\right\} = -\sin 2x \cdot 2$$

$\boxed{3.8}$

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2+2x, & x \le 1 \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2+2x, & x \le 1 \\ 4x+1, & x > 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2+2x, & x \le 1 \\ 4x-1, & x > 1 \end{cases}$$

b) VILKA AV FUNKTIONERNA ÄR KONTINUERLIGA? DERIVERBARA?

OBS! ALLA FUNKTIONER ÄR UPPENBARLIGEN (!) DERIVERBARA FÖR $x \neq 1$ (OCH SÅLEDES ÄVEN KONT. FÖR $x \neq 1$). DET ÅTERSTÅR ATT BESTÄMMA VAD SOM HÄNDER I PUNKTEN $x = 1$.

FÖR ATT f_j SKA VARA KONT. I $x=1$ SÅ MÅSTE $\lim_{x\to 1} f_j(x)$ EXISTERA OCH VARA LIKA MED $f_j(1)$. KOLLA ATT HÖGER OCH VÄNSTER GRÄNSVÄRDE ÖVERENSSTÄMMER (DÅ EXISTERAR GRÄNSVÄRDET):

$$\lim_{x\to 1^-} f_1(x) = 1+2 = 3, \quad \lim_{x\to 1^+} f_1(x) = 1+2 = 3, \quad f_1(1) = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f_2(x) = 1+2 = 3, \quad \lim_{x\to 1^+} f_2(x) = 4+1 = 5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f_3(x) = 1+2 = 3, \quad \lim_{x\to 1^+} f_3(x) = 4-1 = 3, \quad f_3(1) = 3$$

VI SER ATT f_1 OCH f_3 ÄR KONTINUERLIGA, MEN INTE f_2.

BESTÄM NU OM f_1 OCH f_3 ÄR DERIVERBARA (f_2 KAN INTE VARA DERIVERBAR TY DETTA SKULLE MEDFÖRA ATT f_2 VAR KONT.).

KOLLA NU HÖGER- OCH VÄNSTER GRÄNSVÄRDET FÖR DERIVATAN:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - x^2 - 2x}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h+h^2+2h}{h} = 4$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{x+h+2-x-2}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f_3(x+h)-f_3(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - x^2 - 2x}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h+h^2+2h}{h} = 4$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f_3(x+h)-f_3(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{4(x+h)-1-4x+1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{4h}{h} = 4$$

VI SER ATT f_1 EJ ÄR DERIVERBAR (TY $4 \neq 1$), MEN f_3 ÄR DERIVERBAR.

SVAR: f_1 ~~OCH~~ ÄR KONTINUERLIG, f_3 ÄR DERIVERBAR (OCH KONT.)

KEDJEREGELN: $D\left(f(g(x))\right) = Df(g(x)) \cdot Dg(x) \quad \left(= f'(g(x)) \cdot g'(x)\right)$

$$D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$y = \arctan x$

$x = \tan y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right) = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y = \arcsin x$

$x = \sin y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}}$$

OBS! $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

så $\cos y > 0$!

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\boxed{3.9}$ DERIVERA :

$$\boxed{\begin{array}{l} D(e^x) = e^x \\ D(\sin x) = \cos x \end{array}}$$

a) $D(e^{2x} - \sin 3x) = D(e^{2x}) - D(\sin 3x)$

$= e^{2x} \cdot D(2x) - \cos 3x \cdot D(3x)$ (KEDJEREGELN)

$= e^{2x} \cdot 2 - \cos 3x \cdot 3$

$$\boxed{D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

b) $D(\ln x + \arctan x) = D(\ln x) + D(\arctan x)$

$= \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\boxed{D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

c) $D(\arcsin 2x + (2x+1)^7) = D(\arcsin 2x) + D((2x+1)^7)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot D(2x) + 7(2x+1)^6 \cdot D(2x+1)$ (KEDJEREGELN)

$= \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}} + 14 \cdot (2x+1)^6$

$$\boxed{D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1},}$$

e) $D(\sqrt{x}) = D(x^{1/2}) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \cdot = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\boxed{3.10}$ DERIVERA:

a) $$D\left(e^{2x}\cdot \sin 3x\right) = D\left(e^{2x}\right)\cdot \sin 3x + e^{2x}\cdot D(\sin 3x)$$ (PRODUKTREGELN)

$$= e^{2x}\cdot D(2x)\cdot \sin 3x + e^{2x}\cdot \cos 3x \cdot D(3x)$$ (KEDJEREGELN)

$$= 2\cdot e^{2x}\cdot \sin 3x + 3\cdot e^{2x}\cdot \cos 3x$$

$$= e^{2x}\cdot \left(2\cdot \sin 3x + 3\cdot \cos 3x\right)$$

c) $$D\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{D(x)\cdot (x+1) - x\cdot D(x+1)}{(x+1)^2}$$ (KVOTREGELN)

$$= \frac{1\cdot (x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}$$

$\boxed{3.14}$ DERIVERA:

a) $$D(2^x) = D\left(e^{x\cdot \ln 2}\right) = e^{x\cdot\ln 2}\cdot D(x\cdot \ln 2)$$ (KEDJEREGELN)

$$= 2^x \cdot \ln 2$$

d) $$D(x^x) = D\left(e^{x\cdot \ln x}\right) = e^{x\cdot \ln x}\cdot D(x\cdot \ln x)$$ (KEDJEREGELN)

$$= x^x \cdot \left(D(x)\cdot \ln x + x \cdot D(\ln x)\right)$$ (PRODUKTREGELN)

$$= x^x \cdot \left(1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^x \cdot (\ln x + 1)$$

$\boxed{3.13}$ DERIVERA :

a) $$D\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right) = \frac{D\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{(KEDJEREGELN)}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-1/2}\cdot D\left(1+x^2\right)}{x+\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{(KEDJEREGELN)}$$

$$= \frac{1+x\cdot\left(1+x^2\right)^{-1/2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{1+x\cdot\left(1+x^2\right)^{-1/2}}{x^2-\left(1+x^2\right)}\cdot\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$= \sqrt{1+x^2}-\cancel{x}+\cancel{x}-x^2\cdot\left(1+x^2\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\boxed{3.17}$ DERIVERA: $\quad f(x) = \dfrac{e^{x^2} \cdot (\arcsin x)^2 \cdot x \cdot \sqrt{\cos x}}{(\ln x)^6 \cdot \sin^2 x}, \quad x > 0.$

ALLA INGÅENDE TERMER ÄR POSITIVA SÅ VI KAN STUDERA

$F(x) := \log f(x)$:

$$F(x) = \log e^{x^2} + \log\left[(\arcsin x)^2\right] + \log x + \log \sqrt{\cos x} - \log\left[(\ln x)^6\right] - \log \sin^2 x$$

DENNA FUNKTION ÄR ENKLARE ATT DERIVERA. NÄR VI VÄL KÄNNER TILL $F'(x)$ SÅ KAN VI ÅTERFÅ DEN SÖKTA DERIVATAN ENLIGT:

$$F'(x) = D\left(\ln f(x)\right) = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \text{(KEDJEREGELN)}$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = f(x) \cdot F'(x)$$

NU BERÄKNAR VI $F'(x)$ OCH ANVÄNDER UPPREPADE GÅNGER ATT $D\left(\ln g(x)\right) = g'(x)/g(x)$:

$$F'(x) = \frac{e^{x^2} \cdot 2x}{e^{x^2}} + \frac{2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2} + \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2} \cdot (-\sin x)}{\sqrt{\cos x}}$$

$$- \frac{6(\ln x)^5 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^6} - \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= 2x + \frac{2}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x} - \frac{\tan x}{2} - \frac{6}{x \cdot \ln x} - \frac{2}{\tan x}$$

SVAR: $\quad f'(x) = f(x) \cdot \left[2x + \dfrac{2}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{\tan x}{2} - \dfrac{6}{x \ln x} - \dfrac{2}{\tan x}\right]$