IMPLICIT DERIVERING

BESTÄM $y'(1)$ OCH $y''(1)$ DÅ $y(x)$ DEFINIERAS AV EKVATIONEN

(i) $$x^2+2\cdot x\cdot y+3\cdot y^2+x+2\cdot y = 9$$

OCH $y(1)=1$.

DERIVERA V-L OCH H-L MED AVSEENDE PÅ x OCH KOM IHÅG ATT y BEROR PÅ x:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+2xy+3y^2+x+2y\right)=\frac{d}{dx}(9)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\underbrace{\frac{d}{dx}(2xy)}_{\text{PRODUKTREGELN!}}+\frac{d}{dx}(3y^2)+\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(2y) = 0$$

$$2x+\frac{d}{dx}(2x)y+2x\frac{d}{dx}(y)+\underbrace{3\frac{d}{dx}(y^2)}_{\text{KEDJEREGELN!}}+1+2\frac{d}{dx}(y) = 0$$

(ii) $$2x+2y+2xy'+3\cdot 2y\cdot y'+1+2y' = 0$$

BERÄKNA $y'(1)$ GENOM ATT SÄTTA IN $x=1$, $y(1)=1$:

$$2\cdot 1+2y(1)+2\cdot 1\cdot y'(1)+3\cdot 2y(1)\cdot y'(1)+1+2y'(1)=0$$

$$2+2+2y'(1)+6y'(1)+1+2y'(1)=0$$

$$10y'(1)+5=0$$

$$y'(1)=-\frac{1}{2}$$

FÖR ATT BERÄKNA $y''(1)$ DERIVERAR VI V-L OCH H-L AV (ii):

$$2+2y'+\underbrace{(2y'+2xy'')}_{\text{PRODUKTREGELN}}+6\underbrace{(y'\cdot y'+y\cdot y'')}_{\text{PRODUKTREGELN}}+2y''=0$$

SÄTT IN $x=1$, $y(1)=1$, $y'(1)=-\frac{1}{2}$

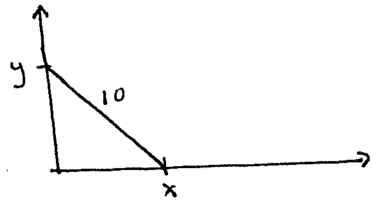
$$2+2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)+2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)+2\cdot 1\cdot y''(1)+6\cdot\left(\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+1\cdot y''(1)\right)+2y''(1)=0$$

$$10y''(1)+2-1-1+\frac{6}{4}=0$$

$$y''(1)=-\frac{6}{40}=-\frac{3}{20}$$

SVAR: $y'(1)=-\frac{1}{2}$, $y''(1)=-\frac{3}{20}$

3.21



SÖKT: $y'(t_0)$ DÅ $x(t_0) = 6$

GIVET $x'(t_0) = 2$

STÄLL UPP SAMBAND MELLAN y OCH x M.H.A. PYTHAGORAS:

$$y = \sqrt{10^2 - x^2} = \sqrt{100 - x^2}$$

DERIVERA M.A.P. t GENOM ATT ANVÄNDA KEDJEREGELN:

$$y'(t) = \frac{1}{2}\left(100 - x(t)^2\right)^{-1/2} \cdot D\left(100 - x(t)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(100 - x(t)^2\right)^{-1/2} \cdot \left(-2 \cdot x(t) \cdot x'(t)\right)$$

SÄTT IN GIVNA VÄRDEN PÅ $x(t_0)$ OCH $x'(t_0)$:

$$y'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \left(100 - 6^2\right)^{-1/2} \cdot (-2 \cdot 6 \cdot 2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{64}} \cdot (-24) = \frac{-24}{2 \cdot 8} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$$

SVAR: STEGENS ÖVERDEL FALLER NEDÅT MED EN HASTIGHET AV $\frac{3}{2}$ m/s.

$\boxed{4.1}$ BESTÄM STATIONÄRA PUNKTER & LOKALA EXTREMPUNKTER TILL f :

b) $f(x) = x^3 - 3x$

STATIONÄRA PUNKTER: X SÅ ATT $f'(x) = 0$

DERIVERA:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

SÖK NOLLSTÄLLEN:

$$3x^2 - 3 = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

D.V.S. $x=-1$ OCH $x=1$ ÄR STATIONÄRA. BESTÄM OM DE ÄVEN ÄR LOKALA EXTREMPUNKTER GENOM ATT SE HUR $f'(x)$ ÄNDRAR TECKEN:

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

VI SER ATT -1 ÄR LOKAL MAXPUNKT, $+1$ ÄR LOKAL MINPUNKT.

SVAR: -1 LOKALT MAX, $+1$ LOKALT MIN
(BÄGGE ÄR STATIONÄRA)

$\boxed{4.6}$ HITTA LOKALA EXTREMPUNKTER, SKISSERA GRAFEN TILL f:

b) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, $x > 0$

DERIVERA:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

SÖK NOLLSTÄLLEN (OBS $x \neq 1$):

$$f'(x) = 0 \implies \ln x - 1 = 0 \implies x = e$$

STÄLL UPP TECKENTABELL FÖR $f'(x)$:

x		1		e	
$f'(x)$	$-$	$*$	$-$	0	$+$

$\implies \begin{cases} x = e \quad \text{LOKALT MIN} \\ f \quad \text{STRIKT } \cancel{\text{VÄXANDE}} \text{ AVTAGANDE} \quad 0<x<1,\ 1<x<e \\ f \quad \text{STRIKT VÄXANDE} \quad x > e \end{cases}$

BESTÄM $f(x)$ DÅ $x \to 0$, $x \to \infty$, $x \to 1^{\pm}$:

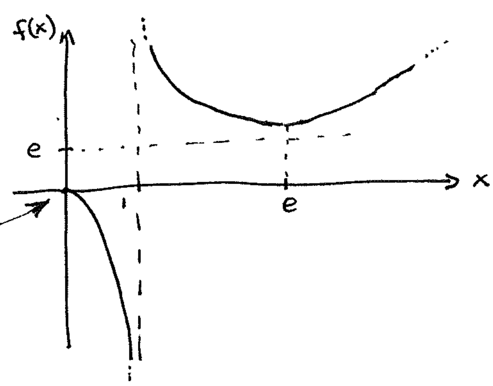
$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln x} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln x} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \infty$$

SLUTLIGEN, BESTÄM $f(x)$ I STATIONÄR PUNKT:

$$f(e) = \frac{e}{\ln e} = e$$

SKISSERA:



KAN ÄVEN SE $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$

SVAR: $x = e$ LOKALT MIN

4.9 BESTÄM MIN/MAX TILL f PÅ I:

c) $f(x) = x e^{-x}$, $I = [0,2]$

SÖK LOKALA EXTREMPUNKTER:

$$f'(x) = e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(1-x)$$

$$f'(x) = 0 \implies 1-x = 0 \implies x = 1$$

x		1	
$f'(x)$	+	0	−

$\implies$ $x = 1$ LOKALT MAX

$f(1) = e^{-1}$

MAX/MIN UPPNÅS ANTINGEN PÅ RANDEN $(x=0,\ x=2)$, ELLER I LOKAL EXTREMPUNKT $(x=1)$. (INGA ANDRA MÖJLIGHETER!)

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 2e^{-2}, \quad f(1) = e^{-1}$$

D.V.S. $\begin{cases} x = 0 & \text{MINPUNKT} \\ x = 1 & \text{MAXPUNKT} \end{cases}$ $(e^{-1} > 2e^{-2}$, KAN INSES GENOM ATT f STRIKT AVTAGANDE FÖR $x > 1)$.

SVAR: STÖRSTA VÄRDE: $f(1) = e^{-1}$, MINSTA VÄRDE $f(0) = 0$.

4.12 BESTÄM LOKALA EXTREMPUNKTER, SAMT MIN/MAX TILL f:

b) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, $x > 0$, $x \neq 1$

I UPPGIFT 4.6 b SÅG VI ATT $x = e$ ÄR LOKAL MINPUNKT. DOCK SAKNAS MIN OCH MAX, TY

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{OCH} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

$\boxed{4.15}$ VISA OLIKHETEN:

a) $\ln x \leq x-1$, FÖR $x>0$

LÅT $f(x) = \ln x$. MEDELVÄRDES-SATSEN SÄGER ATT

$$f(x) - f(1) = f'(x_0)\cdot(x-1), \quad \text{NGT. } x_0 \in (1, x)$$

$f'(x) = \frac{1}{x}$, SÅ OM $x>1$:

$$f(x) - f(1) = \ln x - \ln 1 = \ln x = \frac{1}{x_0}\cdot(x-1), \quad x_0 > 1$$

OM $x_0 > 1$ SÅ $\frac{1}{x_0} < 1$

$$\Longrightarrow \ln x < x-1 \quad (i)$$

OM $x<1$ (OCH $x>0$) SÅ GER MEDELVÄRDESSATSEN

$$\ln 1 - \ln x = \frac{1}{x_0}(1-x), \quad x < x_0 < 1$$

$$\Longrightarrow \ln 1 - \ln x > 1-x$$

$$\Longrightarrow -\ln x > 1-x \Longrightarrow \ln x < x-1 \quad (ii)$$

OM $x=1$ SÅ $\ln x = \ln 1 = 0$, $x-1 = 1-1 = 0$, SÅ $\ln x = x-1$ (iii)

(i), (ii), (iii) GER TILLSAMMANS ATT

$$\ln x \leq x-1 \quad (\text{LIKHET GÄLLER OMM } x=1)$$

4.15

c) VISA ATT: $\ln(1+4x) > \arctan 3x$, OM $x>0$.

LÅT $f(x) = \ln(1+4x) - \arctan 3x$. VI VILL VISA ATT $f(x)>0$ DÅ $x>0$. DETTA GÖR VI GENOM ATT VISA ATT f ÄR STRIKT VÄXANDE FÖR $x>0$, OCH ATT $f(0)=0$.

1) $f(0) = \ln(1+4\cdot 0) - \arctan 0 = 0$

2) $$f'(x) = \frac{4}{1+4x} - \frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{4(1+9x^2)-3(1+4x)}{(1+4x)(1+9x^2)}$$
$$= \frac{36x^2-12x+1}{(1+4x)(1+9x^2)} = \frac{(6x-1)^2}{(1+4x)(1+9x^2)}$$

NÄMNAREN ÄR POSITIV, TÄLJAREN UPPFYLLER

$$\begin{cases} (6x-1)^2 > 0 & \text{OM } x \neq \frac{1}{6} \\ (6x-1)^2 = 0 & \text{OM } x = \frac{1}{6} \end{cases}$$

D.V.S. $f'(x) > 0$ OM $x \neq \frac{1}{6}$, $f'(x) = 0$ OM $x = \frac{1}{6}$.

ENLIGT FÖLJDSATS 2 (S. 207) SÅ ÄR f STRIKT VÄXANDE.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f \text{ STRIKT VÄXANDE} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) > 0,\ x>0. \quad \square$$

$\boxed{4.15}$

e) VISA ATT: $\ln x \le \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, DÅ $x \ge 1$.

LÅT $f(x) = \ln x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. VI VISAR ATT $f(x) \le 0$ DÅ $x \ge 1$.

$$f(1) = \ln 1 - \sqrt{1} + \frac{1}{\sqrt{1}} = 0.$$

$f'(x) < 0,\ x \ge 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{-3/2}$$

$$= \frac{2x^{1/2}}{2x^{3/2}} - \frac{x}{2x^{3/2}} - \frac{1}{2x^{3/2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - x - 1}{2x^{3/2}}$$

NÄMNAREN ÄR POSITIV; BETRAKTA TÄLJAREN $g(x) = 2\sqrt{x} - x - 1$:

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = 2\sqrt{1} - 1 - 1 = 0 \\ g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 < 0 \quad \text{OM } x > 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow g(x) < 0,\ x > 1$$

SÅLEDES ÄR $f'(x) < 0$ DÅ $x > 1$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f'(x) < 0,\ x > 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) < 0, \quad \text{OM } x > 1 \quad \square$$

~~KVADRERA~~