4.15

a) VISA ATT : $\ln x \leq x - 1$, OM $x > 0$

LÅT $f(x) = x - 1 - \ln x$. VI VILL VISA ATT $f(x) \geq 0$ VILKET VI GÖR GENOM ATT BESTÄMMA MINIMUM FÖR f.

i) SÖK STATIONÄRA PUNKTER

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \implies x = 1 \qquad f(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$$

ii) TECKENTABELL

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\implies$ $x = 1$ LOKALT MINIMUM

EFTERSOM $x = 1$ ÄR DEN ENDA STATIONÄRA PUNKTEN SÅ ÄR DEN ÄVEN ETT GLOBALT MINIMUM. D.V.S

$$f(x) \geq f(1) = 0 \qquad \square$$

4.15

c) VISA ATT: $\ln(1+4x) > \arctan 3x$, OM $x>0$.

LÅT $f(x) = \ln(1+4x) - \arctan 3x$. VI VILL VISA ATT $f(x)>0$ DÅ $x>0$. DETTA GÖR VI GENOM ATT VISA ATT f ÄR STRIKT VÄXANDE FÖR $x>0$, OCH ATT $f(0)=0$.

1) $f(0) = \ln(1+4\cdot 0) - \arctan 0 = 0$

2) $$f'(x) = \frac{4}{1+4x} - \frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{4(1+9x^2)-3(1+4x)}{(1+4x)(1+9x^2)}$$

$$= \frac{36x^2-12x+1}{(1+4x)(1+9x^2)} = \frac{(6x-1)^2}{(1+4x)(1+9x^2)}$$

NÄMNAREN ÄR POSITIV, TÄLJAREN UPPFYLLER

$$\begin{cases} (6x-1)^2 > 0 & \text{OM } x \neq \frac{1}{6} \\ (6x-1)^2 = 0 & \text{OM } x = \frac{1}{6} \end{cases}$$

D.V.S. $f'(x) > 0$ OM $x \neq \frac{1}{6}$, $f'(x) = 0$ OM $x = \frac{1}{6}$.

ENLIGT FÖLJDSATS 2 (S. 207) SÅ ÄR f <u>STRIKT</u> VÄXANDE.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f \text{ \underline{STRIKT} VÄXANDE} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) > 0,\ x>0. \quad \square$$

$\boxed{4.15}$ VISA ATT: $\ln x \leq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, DÅ $x \geq 1$.

e)

LÅT $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln x$. VI VISAR ATT $f(x) \geq 0$ DÅ $x \geq 1$. SÖK MINIMUM!

i) STATIONÄRA PUNKTER

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x^{3/2}} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x + 1 - 2\sqrt{x}}{2x^{3/2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{2x^{3/2}}$$

$$f'(x) = 0 \implies x = 1$$

ii) TECKENTABELL

x	1	
$f'(x)$	0	$+$

$\implies$ f STRIKT VÄXANDE DÅ $x \geq 1$

$\implies$ $f(x) \geq f(1)^{=0}$ DÅ $x \geq 1$

VILKET VISAR ATT

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln x \geq 0, \quad x \geq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln x \leq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \geq 1 \qquad \square$$

4.17 BESTÄM OPTIMAL HASTIGHET + MINIMAL KOSTNAD FÖR EN 300 km LÅNG TRANSPORT MED LASTBIL DÅ:

TIMPENNING FÖR CHAUFFÖR: 86 kr/h

KOSTNAD OLJA+DRIVMEDEL: 6 kr/l

FÖRBRUKNING —"— : $g(x) = 2 + \frac{x^2}{300}$ l/h

HASTIGHET x km/h UPPFYLLER: $30 \le x \le 90$

OM T ÄR DEN TOTALA KÖRTIDEN SÅ ÄR $T = \frac{300}{x}$ OCH

KOSTNAD – CHAUFFÖR: $T \cdot 86$

– OLJA+DRIVMEDEL: $T \cdot 6 \cdot g(x)$

DEN TOTALA KOSTNADEN BLIR

$$f(x) = T \cdot 86 + T \cdot 6 \cdot g(x) = T \cdot (86 + 6g(x))$$

$$= \frac{300}{x} \cdot \left(86 + 12 + \frac{x^2}{50}\right) = \frac{300}{x} \cdot \left(98 + \frac{x^2}{50}\right)$$

MINIMERA f!

i) STATIONÄRA PUNKTER

$$f'(x) = -\frac{300 \cdot 98}{x^2} + \frac{300}{50} = 6 - \frac{300 \cdot 98}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \implies x^2 = \frac{300 \cdot 98}{6} = 50 \cdot 98 = 4900 \implies x = 70$$

ii) TECKENTABELL

x		70	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\implies x = 70$ LOKAL MINPUNKT

DÅ f ENDAST HAR ~~[illegible]~~ EN LOKAL EXTREMPUNKT PÅ INTERVALLET $30 \le x \le 70$ SÅ MÅSTE DET ÄVEN VARA EN GLOBAL EXTREMPUNKT. D.V.S. MINSTA KOSTNADEN ÄR

$$f(70) = \frac{300}{70} \cdot \left(98 + \frac{70^2}{50}\right) = \frac{30}{7} \cdot (98 + 7 \cdot 14) = \frac{30}{7} \cdot 196 = 840$$

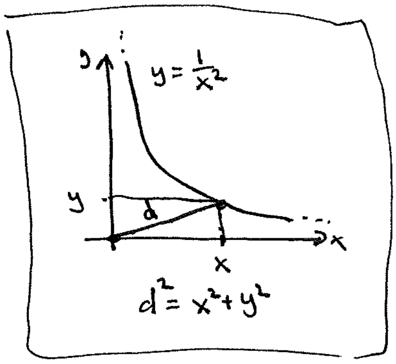
SVAR: DEN OPTIMALA HAST. 70 km/h GER EN MINSTA KOSTNAD PÅ 840 kr.

KS2-06

$\boxed{4.}$

BESTÄM PUNKTEN PÅ KURVAN $y = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$, NÄRMAST ORIGO.

VI SKA MINIMERA AVSTÅNDET FRÅN ORIGO TILL EN PUNKT PÅ KURVAN. DET ÄR EKVIVALENT MED ATT MINIMERA KVADRATEN PÅ AVSTÅNDET, D.V.S.



MINIMERA: $f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{x^4}$

DÅ $x > 0$

1. BESTÄM STATIONÄRA PUNKTER

$$f'(x) = 2x - 4x^{-5}$$

$$f'(x) = 0 \implies 2x = 4x^{-5} \implies x^6 = 2$$

$$\implies x = \underset{(-)}{+} 2^{1/6} \quad (x>0!)$$

2. UPPFÖR TECKENTABELL FÖR ATT KLASSIFICERA DE STATIONÄRA PUNKTERNA

x		$2^{1/6}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\left(f'(x) \longrightarrow -\infty, \text{ DÅ } x \to 0^+ \right.$
$\left. f'(x) \longrightarrow +\infty, \text{ DÅ } x \to \infty \right)$

$\implies x = 2^{1/6}$ ÄR EN LOKAL MINPUNKT

3. BESTÄM MIN GENOM ATT BETRAKTA LOKALA EXTREMPUNKTER SAMT EVENTUELL RAND

$$f(2^{1/6}) = \cancel{x}2^{2/6} + \frac{1}{2^{4/6}} = 2^{1/3} + \frac{1}{2^{2/3}}$$ MINIMUM

$\left(f(x) \longrightarrow \infty \text{ DÅ } x \to 0 \text{ EL. } x \to \infty \right)$

SVAR: PUNKTEN $(2^{1/6}, 2^{-1/3})$ PÅ KURVAN ÄR NÄRMAST ORIGO.

TEN-07
8/1

$\boxed{5.}$ BESTÄM STÖRSTA + MINSTA VÄRDE AV

$$g(x) = 3\ln(3+2x) - 2\ln(1+2x), \qquad 0 \le x \le 2.$$

i) SÖK STATIONÄRA PUNKTER

$$g'(x) = 3\cdot\frac{2}{3+2x} - 2\cdot\frac{2}{1+2x} = \frac{6(1+2x)-4(3+2x)}{(3+2x)\cdot(1+2x)}$$

$$= \frac{4x-6}{(3+2x)(1+2x)}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 4x-6=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

ii) TECKENTABELL

x		$\frac{3}{2}$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ $x=\frac{3}{2}$ LOKALT MIN.

$$g\left(\tfrac{3}{2}\right) = 3\ln 6 - 2\ln 4 = \ln\left(\frac{6^3}{4^2}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{27}{2}\right)$$

iii) RANDVÄRDEN

OBS: ENL. OVAN ÄR g STRIKT AVTAGANDE DÅ $0 \le x \le \frac{3}{2}$ SÅ $g(0) > g\left(\frac{3}{2}\right)$, SAMT SÅ ÄR g STRIKT VÄXANDE DÅ $\frac{3}{2} < x \le 2$ SÅ $g(2) > g\left(\frac{3}{2}\right)$. D.V.S. $x=\frac{3}{2}$ ÄR GLOBAL MINPUNKT.

JÄMFÖR $x=0$ OCH $x=2$ FÖR ATT AVGÖRA VILKEN SOM ÄR GLOBAL MAXPUNKT:

$$g(0) = 3\ln 3 - 2\ln 1 = \ln 27$$
$$g(2) = 3\ln 7 - 2\ln 5 = \ln\left(\frac{7^3}{5^2}\right) = \ln\left(\frac{49}{25}\cdot 7\right) < \ln 14$$

D.V.S. $x=0$ ÄR MAXPUNKT.

SVAR: $\max g(x) = \ln 27$, $\min g(x) = \ln\left(\frac{27}{2}\right)$

TEN -07
8/1

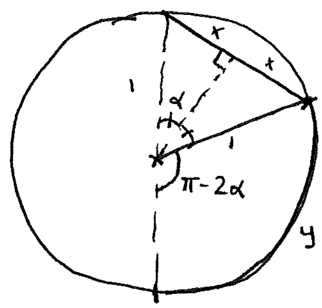
$\boxed{8.}$

VAD ÄR SNABBASTE SÄTTET ATT TA SIG TILL MOTSATT SIDA AV EN CIRKULÄR SJÖ OM MAN KAN SIMMA MED HASTIGHET 1 OCH SPRINGA MED HASTIGHET 3/2 ?

SJÖNS RADIE HAR INGEN INVERKAN PÅ VILKET SÄTT SOM GÅR FORTAST (MEN TIDEN DET TAR BEROR GIVETVIS PÅ RADIEN) SÅ VI KAN ANTA ATT RADIEN ÄR 1.

SIMMA STRÄCKAN : $2x$

SPRING —〃— : y



$$\sin\alpha = x$$
$$y = \pi - 2\alpha$$

TIDEN SOM GÅR ÅT : $T(\alpha) = \frac{2x}{1} + \frac{y}{3/2}$

VI SKA HITTA MINIMUM FÖR $T(\alpha)$ DÅ $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

($\alpha = 0 \iff$ SPRING HELA VÄGEN, $\alpha = \frac{\pi}{2} \iff$ SIMMA HELA VÄGEN)

$$T(\alpha) = 2\sin\alpha + \frac{2}{3}(\pi - 2\alpha)$$

SÖK LOKALA EXTREMPUNKTER!

$$T'(\alpha) = 2\cos\alpha - \frac{4}{3}$$

$$T'(\alpha) = 0 \implies \cos\alpha_* = \frac{2}{3} \quad (\implies \alpha = \arccos\frac{2}{3})$$

α		α_*	
$T'(\alpha)$	+	0	−

$\implies \alpha_*$ ÄR LOKAL MAXPUNKT SÅ MINIMUM ANTAS PÅ RANDEN!

RANDVÄRDEN :

$T(0) = \frac{2\pi}{3}$, $T(\frac{\pi}{2}) = 2$ $\implies \alpha = \frac{\pi}{2}$ ÄR T's MINPUNKT!

SVAR: DET GÅR SNABBAST ATT SIMMA HELA VÄGEN.

TEN-07
3/12

$\boxed{1.}$ BESTÄM MED DERIVATANS DEFINITION:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+2x}$$

DEFINITIONEN SÄGER ATT

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

I VÅRT FALL $(x \neq -\frac{1}{2})$:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+2x} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+2(x+h)}-\frac{1}{1+2x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1+2x-(1+2(x+h))}{(1+2(x+h))(1+2x)\cdot h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\cancel{h}}{(1+2(x+h))(1+2x)\cdot \cancel{h}}$$

$$= -\frac{2}{(1+2x)^2}$$

SVAR: $\frac{d}{dx}\frac{1}{1+2x} = -\frac{2}{(1+2x)^2}$

TEN - 07
3/12

$\boxed{2.}$

SKISSERA GRAFEN TILL

$$f(x) = \frac{e^{-1/x}}{x}, \quad x > 0$$

ANGE LOKALA & GLOBALA EXTREMVÄRDEN, SAMT GRÄNSVÄRDEN DÅ $x \to \infty$, $x \to 0$ (OM DE FINNS).

i) SÖK STATIONÄRA PUNKTER

$$f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot x^{-2} \cdot x - e^{-\frac{1}{x}} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

$$f'(x) = 0 \implies \frac{1}{x} - 1 = 0 \implies x = 1$$

ii) TECKENTABELL FÖR $f'(x)$

x		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$\implies$ $x = 1$ ÄR LOKAL MAXPUNKT

$f(1) = e^{-1}$

iii) UNDERSÖK GRÄNSVÄRDEN

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x}}{x} = \{y = \tfrac{1}{x}\} = \lim_{y \to \infty} y \cdot e^{-y} = 0 \qquad \text{(STANDARD GRV)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-1/x}}{x} = 0 \qquad (\text{TY } e^{-1/x} \to 1, \ x \to \infty)$$

iv) SKISSERA