$\boxed{6.1}$

a) $\displaystyle\int_{-6}^{6} f(x)\,dx = 1\cdot 1 + 4\cdot 2 + (-2)\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + (-4)\cdot 1 + 2\cdot 2$

$= 1 + 8 - 4 + 2 + 6 - 2 - 4 + 4 = \underline{\underline{11}}$

$\boxed{6.2}$ $\displaystyle I = \int_0^{10} \frac{40}{100+x^2}\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx$

$I \geq f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \cdots + f(10)\cdot 1 \geq 3.03$ (UNDRE SUMMA)

$I \leq f(0)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \cdots + f(9)\cdot 1 \leq 3.24$ (ÖVRE SUMMA)

SÅLEDES GÄLLER

$3.03 \leq I \leq 3.24$

$\boxed{6.3}$ VISA OLIKHETEN

$$\int_0^3 \left(1+e^{-x^2}\right)dx \leq 6$$

VI ANVÄNDER RÄKNEREGELN

$$(*) \quad \boxed{f \leq g \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx}$$

LÅT $f(x) = 1+e^{-x^2}$, $0 \leq x \leq 3$. e^{-x^2} ÄR (STRIKT) AVTAGANDE

SÅ $f(x) \leq f(0) = 1+e^0 = 2$. $(*)$ GER SÅLEDES ATT

$$\int_0^3 f(x)\,dx \leq \int_0^3 2\,dx \overset{(**)}{=} 2\int_0^3 dx = 2\cdot 3 = 6$$

D.V.S.

$$\int_0^3 \left(1+e^{-x^2}\right)dx \leq 6 . \qquad \square$$

$(**)$ I DETTA STEG HAR VI ANVÄNT ATT INTEGRERING ÄR EN LINJÄR OPERATION. D.V.S. OM $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ SÅ

$$\boxed{\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx}$$

$\boxed{6.4}$ VARFÖR ÄR FÖLJANDE LIKHET ORIMLIG?

$$\int_0^{1/2} (\arcsin x)^2 \, dx = 1 - \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \qquad \text{(OBS! FEL!)}$$

INTEGRANDEN ÄR ICKE-NEGATIV $\left((\arcsin x)^2 \geq 0 \right)$ SÅ RÄKNEREGELN (*) FRÅN FÖREGÅENDE UPPGIFT GER

$$V\text{-}L = \int_0^{1/2} (\arcsin x)^2 \, dx \geq \int_0^{1/2} 0 \cdot dx = 0$$

MEN $\pi > 3$ SÅ

$$H\text{-}L = 1 - \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 < 1 - \left(\frac{3}{3}\right)^2 = 0$$

D.V.S. V-L ÄR ≥ 0 MEDANS H-L ÄR < 0 SÅ LIKHET KAN INTE GÄLLA.

$\boxed{6.6}$ BERÄKNA

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} x \cdot \sin\frac{1}{x}\, dx$$

VI ANVÄNDER INTEGRALKALKYLENS MEDELVÄRDESSATS (s. 294)

$$(*) \quad f \text{ KONT. I } [a,b] \implies \int_a^b f(x)dx = f(t)\cdot(b-a) \quad \text{FÖR NÅGOT } t\in[a,b]$$

FUNKTIONEN $f(x) = x\cdot\sin\frac{1}{x}$ ÄR KONT. DÅ $x>0^{(**)}$ SÅ FÖR VARJE INTERVAL $[n, n+1]$ $(n\geq 1)$ SÅ GER $(*)$ ATT DET FINNS ETT t_n SÅ ATT: (i) $n \leq t_n \leq n+1$ OCH

$$\text{(ii)} \quad \int_n^{n+1} f(x)dx = f(t_n)\cdot(n+1-n) = f(t_n).$$

NU GER (i) ATT $t_n \to \infty$ DÅ $n\to\infty$, SÅ

$$\text{(iii)} \quad \lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{t_n\to\infty} t_n \cdot \sin\frac{1}{t_n} = \left\{s_n = \frac{1}{t_n}\right\}$$

$$= \lim_{s_n\to 0} \frac{\sin s_n}{s_n} = 1$$

EKV. (ii)+(iii) VISAR ALLTSÅ ATT

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} x\cdot\sin\frac{1}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} f(t_n) = 1$$

SVAR: $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} x\cdot\sin\frac{1}{x}\, dx = 1$

(**) $\left.\begin{array}{l} x \mapsto \frac{1}{x} \\ x\mapsto \sin x \end{array}\right\}$ ÄR KONT. DÅ $x>0$, SÅ $x\mapsto \sin\frac{1}{x}$ ÄR OCKSÅ KONT. FÖR $x>0$ TY DET ÄR EN SAMMANSÄTTNING AV TVÅ KONT. FUNKTIONER

$x \mapsto x\cdot\sin\frac{1}{x}$ ÄR KONT. TY DET ÄR EN PRODUKT AV TVÅ KONT. FUNKTIONER.

$\boxed{6.10}$ BESTÄM MAXPUNKT TILL

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \cdot \sin t \, dt, \qquad 0 \leq x \leq 2\pi .$$

VI ANVÄNDER ANALYSENS HUVUDSATS (S. 296):

$$\left.\begin{array}{l} S(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leq x \leq b \\ f \text{ KONTINUERLIG PÅ } [a,b] \end{array}\right\} \Longrightarrow S'(x) = f(x)$$

LÖS UPPGIFTEN SOM VANLIGT OPTIMERINGSPROBLEM:

i) STATIONÄRA PUNKTER

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot \sin x$$

$$f'(x) = 0 \underset{(e^{-x^2} > 0)}{\Longrightarrow} \sin x = 0 \underset{(0 \leq x \leq 2\pi)}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

ii) TECKENTABELL

x	0		π		2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

$\Longrightarrow$ $x = \pi$ MAXPUNKT OCH DÅ RANDEN OCKSÅ STATIONÄR SER VI ATT DET ÄR EN GLOBAL MAXPUNKT.

SVAR: $x = \pi$

6.11 BERÄKNA DERIVATAN

b) $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt \,, \qquad x > 0$

VI SER ATT $f(x) = g(h(x))$ DÄR

$$h(x) = \sqrt{x}$$
$$g(x) = \int_1^{x} \cos(t^2)\,dt$$

ANALYSENS HUVUDSATS GER ATT

$$g'(x) = \cos(x^2).$$

KEDJEREGELN GER

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$
$$= \cos\left(h(x)^2\right) \cdot h'(x)$$
$$= \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}$$

SVAR: $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{x}}$

$\boxed{6.45}$ BESTÄM FUNKTIONEN f FÖR $x>0$ OM AREAN UNDER GRAFEN FÖR f GES AV

(*) $$A(x) = \arctan(x^2)$$

AREAN UNDER GRAFEN KAN SKRIVAS SOM

$$A(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

ANALYSENS HUVUDSATS GER ATT

$$A'(x) = f(x)$$

DERIVERA (*)

$$f(x) = A'(x) = \frac{2x}{1+(x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4}$$

SVAR: $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$

RÄKNEREGLER:

(i) $$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$ (LINEARITET)

(ii) $$f(x) \le g(x), \quad x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$ (MONOTONICITET)

(iii) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(iv) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

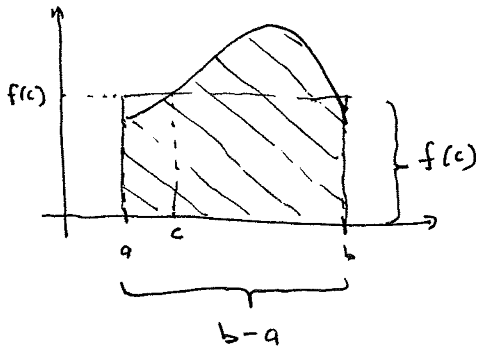
(OBS! $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$)

(v) $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$ (TRIANGELOLIKHETEN)

INTEGRALKALKYLENS MEDELVÄRDESSATS:

$$f \text{ KONT. PÅ } [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a), \quad \text{NGT. } c \in [a,b]$$

TOLKNING:

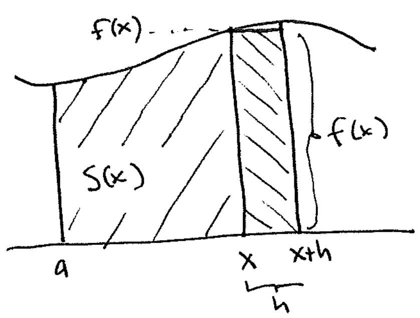


DET FINNS (MINST) EN PUNKT $c \in [a,b]$ SÅ ATT AREAN UNDER GRAFEN TILL f ÄR LIKA MED AREAN AV REKTANGELN MED SIDLÄNGDER $(b-a)$ OCH $f(c)$

ANALYSENS HUVUDSATS:

$$\left.\begin{array}{l} S(x) = \int_a^x f(x)\,dx, \quad a \le x \le b \\ f \text{ KONT. PÅ } [a,b] \end{array}\right\} \implies S'(x) = f(x)$$

TOLKNING:



OM x ÖKAR MED h SÅ ÖKAR AREAN $S(x)$ UNGEFÄR MED $f(x)\cdot h$, VILKET INNEBÄR

$$S'(x) \approx \frac{f(x)\cdot h}{h} = f(x)$$

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \approx \frac{S(x) + h\cdot f(x) - S(x)}{h} = f(x)$$