$\boxed{5.2}$ BESTÄM EN PRIMITIV FUNKTION TILL:

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

VI SÖKER EN FUNKTION F SÅDAN ATT $F'(x) = f(x)$.
(OBS! F ÄR INTE ENTYDIGT BESTÄMD: OM G ÄR EN ANNAN FUNKTION SOM UPPFYLLER $G'(x) = f(x)$ SÅ GÄLLER ATT $F(x) - G(x) = c$ FÖR NÅGON KONSTANT c.)

DET FINNS INGEN REGEL FÖR ATT BESTÄMMA F; ISTÄLLET SÅ BÖRJAR MAN MED ATT GISSA EN FUNKTION SOM MAN DERIVERAR OCH OM SVARET STÄMMER ÄR MAN KLAR – ANNARS JUSTERAR MAN GISSNINGEN.

i) GISSA:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ii) JUSTERA:

$$2\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

SVAR: $F(x) = 2\sqrt{x}$

$\boxed{5.3}$ BESTÄM EN PRIMITIV FUNKTION TILL:

a) $\frac{1}{x}$

VI VET ATT

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

SVAR: $\ln|x|$

k) $\frac{1}{(2x+1)^2}$

$$D\left(\frac{1}{2x+1}\right) = -\frac{2}{(2x+1)^2} \Rightarrow -\frac{1}{2} D\left(\frac{1}{2x+1}\right) = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

SVAR: $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1}$

$\boxed{5.5}$ BESTÄM PRIMITIV FUNKTION

h) e^{2x+1}

$D(e^{2x+1}) = 2 \cdot e^{2x+1} \Longrightarrow D\left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right) = e^{2x+1}$

SVAR: $\frac{1}{2} e^{2x+1}$

$\boxed{5.8}$ BESTÄM PRIMITIV FUNKTION

b) xe^{x^2}

$D(e^{x^2}) = 2x \cdot e^{x^2} \Longrightarrow D\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right) = x \cdot e^{x^2}$

SVAR: $\frac{1}{2} e^{x^2}$

$\boxed{5.17}$ BESTÄM SAMTLIGA PRIMITIVA FUNKTIONER TILL:

a) $x^2 \cdot \ln x$

ANVÄND PARTIELL INTEGRATION:

$$(*) \quad \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

I VÅRT FALL: $f'(x) = x^2$, $g(x) = \ln x \implies f(x) = \frac{x^3}{3}$, $g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

SVAR: $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

b) $x^2 \cdot \sin x$

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cdot \cos x - \int 2x \cdot (-\cos x) dx$$

$$= -x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot \left(x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx \right)$$

$$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x + C$$

SVAR: $(2-x^2) \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + C$

$\boxed{5.23}$ BESTÄM SAMTLIGA PRIMITIVA FUNKTIONER:

a) $$f(x) = \frac{1}{x^2-4}$$

FAKTORISERA:

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-2)}$$

PARTIALBRÅKSUPPDELA:

$$f(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-2} = A + \frac{B(x+2)}{x-2} \Rightarrow \frac{1}{-2-2} = A + \frac{B\cdot 0}{-2-2}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{A(x-2)}{x+2} + B \Rightarrow \frac{1}{2+2} = \frac{A\cdot 0}{2+2} + B$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

BESTÄM PRIMITIV:

$$\int f(x)\,dx = \int\left(\frac{-1/4}{x+2} + \frac{1/4}{x-2}\right)dx \overset{\text{(LINEARITET)}}{=} -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x-2| + C$$ KONSTANT

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

SVAR: $$\int\frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

5.31

b) $f(x) = \dfrac{x^2+8x+4}{x^2+4x+8}$

TÄLJARENS GRAD ÄR $\geq$ NÄMNARENS GRAD — POLYNOMDIVIDERA!

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2+4x+8 & x^2+8x+4 \\ & -(x^2+4x+8) \\ \hline & 4x-4 \end{array} \Longrightarrow \frac{x^2+8x+4}{x^2+4x+8} = 1 + \frac{4x-4}{x^2+\cancel{8}4x+\cancel{4}8}$$

$$= \frac{4(x-1)}{(x+2)^2+4} + 1$$

$$= \frac{x-1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1} + 1$$

BESTÄM PRIMITIV:

$$\int f(x)\,dx = \int \left(1 + \frac{x-1}{1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2}\right) dx$$

$$= \int dx + \int \frac{x-1}{1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2}\,dx = \left\{ y = \frac{x+2}{2},\ dy = \frac{dx}{2} \right\}$$

$$= x + \int \frac{2y-3}{1+y^2}\, 2 \cdot dy = x + 2\int \frac{2y}{1+y^2}\,dy - 6\int \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= x + 2 \cdot \ln(1+y^2) - 6 \cdot \arctan y + C$$

$$= x + 2 \cdot \ln\left(1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2\right) - 6 \cdot \arctan \frac{\cancel{x}x+2}{2} + C$$

VI KAN FÖRENKLA ln - TERMEN

$$\ln\left(1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{4+x^2+4x+4}{4}\right) = \ln(x^2+4x+8) - \ln 4$$

OM VI "FLYTTAR IN $-\ln 4$ I KONSTANTEN C" SÅ FÅR VI:

SVAR: $\displaystyle\int \frac{x^2+8x+4}{x^2+4x+8}\,dx = x + 2\ln(x^2+4x+8) - 6\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + K$

PRODUKTREGELN: $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

LEDER TILL: $\int D(f(x)g(x))\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$

$$\boxed{\text{PARTIALINTEGRERING: } f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx}$$

KEDJEREGELN: $D(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$

LEDER TILL $\int D(f(g(x)))\,dx = \int f'(g(x))g'(x)\,dx$

$$\boxed{\text{VARIABELSUBSTITUTION: } \int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C}$$

HUVUDSATSEN: $\left.\begin{array}{l} S(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \le x \le b \\ f \text{ KONT. PÅ } [a,b] \end{array}\right\} \Longrightarrow S'(x) = f(x)$

(DERIVERA INTEGRAL FÖR ATT ÅTERFÅ FUNKTIONEN f.)
(VARJE KONT. FUNKTION HAR EN PRIMITIV.)

INSÄTTNINGSFORMELN: $\left.\begin{array}{l} f \text{ KONT. PÅ } [a,b] \\ F \text{ PRIMITIV TILL } f \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

($\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$ $\longrightarrow$ INTEGRERA f' FÖR ATT ÅTERFÅ f.)
(OM VI KÄNNER TILL PRIMITIV SÅ KAN VI BERÄKNA INTEGRALEN.)

DESSA TVÅ SATSER VISAR ATT DERIVERING OCH INTEGRERING ÄR "VARANDRAS INVERS"

"$D(\int f) = f$" (HUVUDSATSEN)

"$\int(Df) = f$" (INSÄTTNINGSFORMELN)