$\boxed{5.24}$ BESTÄM SAMTLIGA PRIMITIVA FUNKTIONER:

a) $$f(x) = \frac{1}{x(x-3)^2}$$

PARTIALBRÅKSUPPDELA

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-3)^2} = A + x\cdot\left(\frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{(0-3)^2} = A + 0\cdot(\dots)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = (x-3)^2\cdot\frac{A}{x} + (x-3)\cdot B + C \Rightarrow \frac{1}{3} = 0\cdot\frac{A}{3} + 0\cdot B + C$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(x-3)^2} = \frac{\frac{1}{9}(x-3)^2 + B\cdot(x-3)\cdot x + \frac{1}{3}\cdot x}{x(x-3)^2} =$$

$$= \cancel{} = \frac{(\frac{1}{9}+B)\cdot x^2 + (-2\cdot 3\cdot\frac{1}{9} - 3B + \frac{1}{3})x + \frac{3^2}{9}}{x(x-3)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{9} + B = 0 \\ -\frac{1}{3} - 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow B = -\frac{1}{9}$$

BESTÄM PRIMITIV

$$\int f(x)\,dx = \int\left(\frac{1}{9x} - \frac{1}{9(x-3)} + \frac{1}{3(x-3)^2}\right)dx = \frac{1}{9}\int\frac{dx}{x} - \frac{1}{9}\int\frac{dx}{x-3} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{9}\ln|x-3| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-3} + K$$

$$= \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x}{x-3}\right| - \frac{1}{3(x-3)} + K$$

SVAR: $$\int\frac{dx}{x\cdot(x-3)^2} = \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x}{x-3}\right| - \frac{1}{3(x-3)} + K$$

5.26 BESTÄM SAMTLIGA PRIMITIVA FUNKTIONER

b) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{x^2}{9} + 1}$

GÖR SUBSTITUTIONEN $y = \frac{x}{3}$, DÅ $dy = \frac{dx}{3}$ OCH

$$\int \frac{dx}{\frac{x^2}{9}+1} = \int \frac{3dy}{y^2+1} = 3\int \frac{dy}{1+y^2} = 3 \cdot \arctan y + C$$

$$= 3 \cdot \arctan \frac{x}{3} + C$$

SVAR: $\displaystyle\int \frac{dx}{\frac{x^2}{9}+1} = 3 \cdot \arctan \frac{x}{3} + C$

5.27

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 5}$

KVADRATKOMPLETTERA:

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1}$$

GÖR SUBSTITUTIONEN $y = \frac{x-1}{2}$, $dy = \frac{dx}{2}$:

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2\,dy}{y^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2} \arctan y + C$$

$$= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

SVAR: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+5} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

5.31

b) $f(x) = \dfrac{x^2+8x+4}{x^2+4x+8}$

TÄLJARENS GRAD ÄR $\geq$ NÄMNARENS GRAD — POLYNOMDIVIDERA!

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2+4x+8 & x^2+8x+4 \\ & -(x^2+4x+8) \\ \hline & 4x-4 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2+8x+4}{x^2+4x+8} = 1 + \frac{4x-4}{x^2+4x+8}$$

$$= \frac{4(x-1)}{(x+2)^2+4} + 1$$

$$= \frac{x-1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1} + 1$$

BESTÄM PRIMITIV:

$$\int f(x)\,dx = \int \left(1 + \frac{x-1}{1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2}\right) dx$$

$$= \int dx + \int \frac{x-1}{1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2}\,dx = \left\{ y = \frac{x+2}{2},\ dy = \frac{dx}{2} \right\}$$

$$= x + \int \frac{2y-3}{1+y^2}\,2\cdot dy = x + 2\int \frac{2y}{1+y^2}\,dy - 6\int \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= x + 2\cdot \ln(1+y^2) - 6\cdot \arctan y + C$$

$$= x + 2\cdot \ln\left(1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2\right) - 6\cdot \arctan \frac{x+2}{2} + C$$

VI KAN FÖRENKLA ln - TERMEN

$$\ln\left(1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{4+x^2+4x+4}{4}\right) = \ln(x^2+4x+8) - \ln 4$$

OM VI "FLYTTAR IN $-\ln 4$ I KONSTANTEN C" SÅ FÅR VI:

SVAR: $\displaystyle\int \frac{x^2+8x+4}{x^2+4x+8}\,dx = x + 2\ln(x^2+4x+8) - 6\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + K$

$\boxed{5.36}$ BESTÄM SAMTLIGA PRIMITIVA FUNKTIONER TILL:

a) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

KVADRATKOMPLETTERA

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}}$$

VARIABELSUBST. $y = x+2$; $dy = dx$:

$$(*) = \int f(x)\,dx = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ (12)\ s.251}}{=} \ln\left|y+\sqrt{y^2+1}\right| + c$$

$$= \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}\right| + c$$

$$= \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right| + C$$

SVAR: $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right| + C$$

$\boxed{5.37}$ BESTÄM SAMTLIGA PRIMITIVA FUNKTIONER TILL

b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

FÖRST OCH FRÄMST LÄGGER VI MÄRKE TILL ATT FUNKTIONEN ENDAST ÄR DEFINIERAD DÅ $-1 \le x \le 1$ (ANNARS FÅR VI NEGATIVA TAL UNDER ROTTECKNET).

GÖR SUBSTITUTIONEN $x = \sin t$, $dx = \cos t\,dt$:

$$(*) : \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\,dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cdot \cos t\,dt$$

$$= \int |\cos t| \cdot \cos t\,dt$$

FÖR ATT BLI AV MED ABSOLUTBELOPPSTECKNET GÖR VI FÖLJANDE OBSERVATIONER.

1. FÖR ATT VARIABELBYTET $x = \sin t$ SKA VARA ENTYDIGT MÅSTE t VARA BEGRÄNSAD TILL ETT INTERVALL I DÄR $\sin t$ ÄR INJEKTIV – ANNARS KAN VI "GÅ TILLBAKA" FRÅN t TILL x.
2. OM $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ SÅ ÄR $\sin t$ INJEKTIV OCH VI KAN DÅ LÖSA UT $t = \arcsin x$
3. OM $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ SÅ ÄR $\cos t \ge 0$, SÅ $|\cos t| = \cos t$.

ANVÄND (3) FÖRST:

$$(*) = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \int \frac{1}{2}\,dt + \int \frac{\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C$$

NU ANVÄNDER VI (2) FÖR ATT "BYTA UT" t MOT x, DETTA STEG FUNGERAR BARA OM VARIABELBYTET ÄR INJEKTIVT!;

$$(*) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\sin t\cdot\cos t + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{1-x^2} + C$$

SVAR: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$

$\boxed{5.37}$

b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

FÖR ATT LÖSA DENNA INTEGRAL KRÄVS TVÅ TRICK:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2}\,dx$$ (TRICK 1: SKRIV OM OCH ...

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx$$ ... PARTIALINTEGRERA)

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$ (TRICK 2: ADDERA/DRA BORT 1 ...

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$ ... ANVÄND LINEARITET)

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin x$$

NU SER VI ATT $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ DYKER UPP BÅDE I V-L OCH H-L, SÅ VI FLYTTAR ÖVER TERMEN TILL V-L:

$$2\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$$

SVAR: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C$

$\boxed{5.40}$

c) $$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \sin^2 x}$$

GÖR VARIABELSUBSTITUTIONEN $y = \sin x$, $dy = \cos x\,dx$:

$$(*) \quad \int \frac{\cos x}{\sin x + \sin^2 x}\,dx = \int \frac{dy}{y + y^2} = \int \frac{dy}{y(1+y)}$$

PARTIALBRÅKSUPPDELA:

$$\frac{1}{y(1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y+1} = A + \frac{By}{1+y} \overset{y=0}{\Longrightarrow} A = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y} = \frac{A(1+y)}{y} + B \overset{y=-1}{\Longrightarrow} B = -1$$

$$\frac{1}{y(1+y)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}$$

VILKET GER

$$(*) = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right)dy = \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{1+y} = \log|y| - \log|1+y| + C$$

$$= \log\left|\frac{y}{1+y}\right| + C = \log\left|\frac{\sin x}{1+\sin x}\right| + C$$

SVAR: $$\int \frac{\cos x}{\sin x + \sin^2 x}\,dx = \log\left|\frac{\sin x}{1+\sin x}\right| + C$$

$\boxed{5.41}$ BESTÄM ALLA PRIMITIVA FUNKTIONER TILL:

b) $f(x) = \sin^4 x \, dx$

ANVÄND DUBBLA VINKELN FÖR COSINUS:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$= 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

VI FÅR

$$\int \sin^4 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\left\{\int dx - 2\int \cos 2x \, dx + \int \cos^2 2x \, dx\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\left\{x - \sin 2x + \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\left\{x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x \, dx\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\left\{x - \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 4x}{4}\right\} + C$$
$$= \underline{\underline{\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C}}$$

SAMMA METOD FUNGERAR FÖR $(\sin x)^{2n}$ OCH $(\cos x)^{2n}$, D.V.S DÅ EXPONENTEN ÄR JÄMN. ÄR EXPONENTEN UDDA KAN MAN ANVÄNDA TRIGONOMETRISKA ETTAN OCH EN SUBSTITUTION, EX:

$$\int (\sin x)^{2n+1} dx = \int (\sin x)^{2n}\cdot \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x)^n \cdot \sin x \, dx$$
$$= \left\{\begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{matrix}\right\} = -\int (1-t^2)^n \cdot dt = \ldots$$

SUBSTITUTIONEN FUNGERAR FÖR INTEGRALER AV TYPEN

$$\int f(\sin x)\cos x \, dx = \left\{\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{matrix}\right\} = \int f(t) dt$$
$$\int f(\cos x)\sin x \, dx = \left\{\begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{matrix}\right\} = -\int f(t) dt$$

6.26 BERÄKNA DE GENERALISERADE INTEGRALERNA

a) $$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty D\left(\ln|1+x^2|\right)dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}\ln(1+x^2) - \ln 1\right) = \infty$$

SVAR: INTEGRALEN DIVERGERAR.

---

d) $$\int_2^\infty \frac{x}{x^4-1}dx$$

PARTIALBRÅKSUPPDELA

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{x}{(x^2+1)(x^2-1)} = x\cdot\left(\frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2-1}\right)$$

$$\Rightarrow A(x^2-1) + B(x^2+1) = 1 \Rightarrow (A+B)x^2 + B - A = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B-A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ 2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^4-1} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{x}{2(x^2-1)}$$

$$\int_2^\infty \frac{x}{x^4-1}dx = \int_2^\infty\left(\frac{x}{2(x^2-1)} - \frac{x}{2(x^2+1)}\right)dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\int_2^\infty D\left(\ln|x^2-1|\right)dx - \frac{1}{2}\int_2^\infty D\left(\ln|x^2+1|\right)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right]_2^\infty = \frac{1}{4}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| - \ln\frac{3}{5}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\frac{3}{5} = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$$

SVAR: $$\int_2^\infty \frac{x\,dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$$

$\boxed{6.42}$ AVGÖR OM DEN GENERALISERADE INTEGRALEN KONVERGERAR:

$$\int_1^{\infty} \frac{2+\sin x}{1+x^2}\,dx$$

LÄGG MÄRKE TILL ATT TÄLJAREN ÄR BEGRÄNSAD:

$$2 + \sin x \leq 2 + 1 = 3$$

DETTA GER

$$\int_1^{\infty} \frac{2+\sin x}{1+x^2}\,dx \leq \int_1^{\infty} \frac{3\,dx}{1+x^2} = 3\left[\arctan x\right]_1^{\infty} = 3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{3\pi}{4}$$

D.V.S. INTEGRALEN I V-L KONVERGERAR.

SVAR: INTEGRALEN ÄR KONVERGENT.

VIKTIGA GENERALISERADE INTEGRALER:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{cases} \text{KONVERGENT OM } \alpha > 1 \\ \text{DIVERGENT OM } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{cases} \text{DIVERGENT OM } \alpha \geq 1 \\ \text{KONVERGENT OM } \alpha < 1 \end{cases}$$

VARIABELSUBSTITUTION:

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(y))\,g'(y)\,dy$$

DÄR $x = g(y)$ ÄR VARIABELBYTET.

OBS! g MÅSTE VARA INJEKTIV.

(ANNARS KAN VI INTE GÅ TILLBAKA TILL x NÄR VI LÖST INTEGRALEN FÖR y.)

DETTA ANVÄNDBART DÅ INTEGRALEN I V-L ÄR SVÅRARE ATT LÖSA ÄN DEN I H-L.