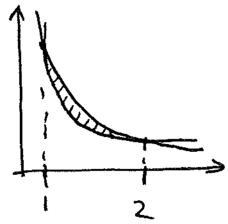
$\boxed{7.51}$ BESTÄM AREAN AV DET OMRÅDE SOM BEGRÄNSAS AV

(KAP. 7.1) $y = \frac{1}{x}$ OCH $y = \frac{3}{2+x^2}$ $(x>0)$

BESTÄM SKÄRNINGSPUNKTER



$$\frac{1}{x} = \frac{3}{2+x^2} \Rightarrow 2+x^2 = 3x \Rightarrow x^2-3x+2=0$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

AREAN GES AV

$$\int_1^2 \left(\frac{3}{2+x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{dx}{1+\frac{x^2}{2}} - \int_1^2 \frac{dx}{x} = \left\{\begin{matrix} t = x/\sqrt{2}, & x=1 \Rightarrow t = 1/\sqrt{2} \\ dt = dx/\sqrt{2}, & x=2 \Rightarrow t = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}\,dt}{1+t^2} - \left[\ln x\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\left[\arctan t\right]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} - \ln 2$$

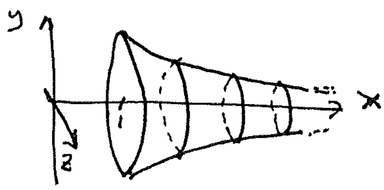
$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\arctan\sqrt{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln 2$$

SVAR: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\sqrt{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln 2$

7.20 BESTÄM VOLYMEN AV ROTATIONSKROPPEN RUNT X-AXELN

(KAP. 7.3)

$$y = \frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}}, \quad x \geq 1$$



LÅT $A(x)$ BETECKNA AREAN AV ETT SNITT GENOM KROPPEN MED X-KOORDINAT x SÅ ATT SNITTET ÄR PARALLELLT MED y-z PLANET.

SKIVFORMELN (KAP 7.3) GER ATT VOLYMEN

$$V = \int_1^\infty A(x)\,dx$$

FÖR ROTATIONSVOLYMER ÄR SNITTEN CIRKLAR, SÅ

$$A(x) = \pi y^2 = \frac{\pi}{x(1+x^2)}$$

GÖR PARTIALBRÅKSUPPDELNING

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2)+(Bx+C)x}{x(1+x^2)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

VOLYMEN BLIR

$$V = \int_1^\infty \frac{\pi\,dx}{x(1+x^2)} = \pi \cdot \left\{ \int_1^\infty \frac{dx}{x} + \int_1^\infty \frac{-x\,dx}{1+x^2} \right\} = \pi \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \right]_1^\infty$$

$$= \pi \cdot \left[\ln x - \ln\sqrt{1+x^2} \right]_1^\infty = \pi \cdot \left[\ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]_1^\infty$$

$$= \pi \cdot \left\{ \lim_{x\to\infty} \ln \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} - \ln\frac{1}{\sqrt{1+1}} \right\} = \pi \cdot (\ln 1 - \ln 1 + \ln\sqrt{2})$$

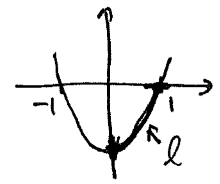
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \ln 2$$

SVAR: $\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2$

$\boxed{7.27}$ BERÄKNA LÄNGDEN AV DEN DEL AV $y = x^2 - 1$ SOM LIGGER UNDER X-AXELN.

(KAP. 7.4)

OM $-1 < x < 1$ SÅ ÄR $y < 0$. KURVAN ÄR SYMMETRISK KRING y-AXELN SÅ BERÄKNA FÖRST LÄNGDEN FRÅN $x=0$ TILL $x=1$.



KURVAN PARAMETRISERAS AV

$$\gamma(t) = (t, t^2-1), \quad 0 \le t \le 1$$

DÅ $\gamma'(t) = (1, 2t)$ GES LÄNGDEN AV

$$l = \int_0^1 \sqrt{1^2 + (2t)^2}\, dt = \left\{ \begin{array}{ll} s = 2t, & t=0 \Rightarrow s=0 \\ ds = 2dt, & t=1 \Rightarrow s=2 \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1+s^2}\, \frac{ds}{2} = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+s^2}\, ds$$

$$\int_0^2 \sqrt{1+s^2}\, ds = \int_0^2 1 \cdot \sqrt{1+s^2}\, ds = \left[s\sqrt{1+s^2} \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}\, ds$$ (PARTIELL INTEGRATION)

$$= 2\sqrt{1+4} - \int_0^2 \frac{1+s^2-1}{\sqrt{1+s^2}}\, ds = 2\sqrt{5} - \int_0^2 \sqrt{1+s^2}\, ds + \int_0^2 \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}}$$

$$= 2\sqrt{5} - \int_0^2 \sqrt{1+s^2}\, ds + \left[\ln\left| s + \sqrt{1+s^2} \right| \right]_0^2$$

$$= 2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{1+4}) - \int_0^2 \sqrt{1+s^2}\, ds$$ FLYTTA TILL V-L OCH DELA MED 2.

$$\Rightarrow \int_0^2 \sqrt{1+s^2}\, ds = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})\right) = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$$

SÅLEDES FÅR VI ATT DEN TOTALA LÄNGDEN BLIR

$$L = 2l = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+s^2}\, ds = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$$

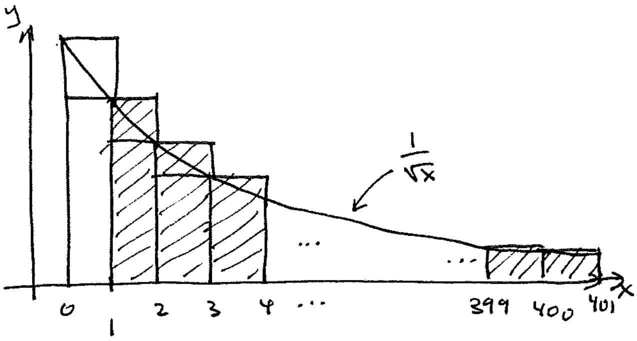
SVAR: $\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$

$\boxed{7.46}$ VISA ATT

(KAP. 7.9)

$$35 \le \sum_{k=1}^{400} \frac{1}{\sqrt{x}} \le 40$$

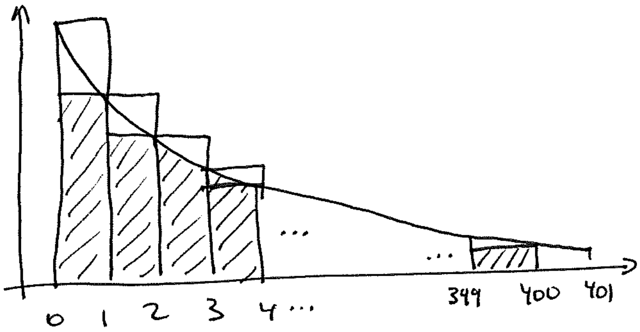
BETRAKTA SUMMAN SOM AREAN UNDER EN TRAPPSTEGSFUNKTION. SKISSERA ~~AREAN~~ :



UPPSKATTA DEN SKUGGADE AREAN MED AREAN UNDER GRAFEN :

$$\sum_{k=1}^{400} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \int_1^{401} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\left[\sqrt{x}\right]_1^{401} = 2\left(\sqrt{401} - 1\right) \ge 2\cdot(20-1) = 38$$

GÖR LIKNANDE UPPSKATTNING OVANIFRÅN :



$$\sum_{k=1}^{400} \frac{1}{\sqrt{k}} \le \int_0^{400} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\left[\sqrt{x}\right]_0^{400} = 2\cdot 20 = 40$$

DETTA VISAR ATT

$$38 \le \sum_{k=1}^{400} \frac{1}{\sqrt{k}} \le 40$$