SYMBOLEN $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ BETECKNAR EN SERIE. DESSA DEFINIERAS SOM EN GRÄNS AV PARTIALSUMMOR:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k$$

OM GRÄNSEN $\lim_{k\to\infty} S_k$ EXISTERAR SÅ SÄGER VI ATT SERIEN KONVERGERAR, ANNARS DIVERGERAR SERIEN.

I DEFINITIONEN ÄR DET UNDERFÖRSTÅTT ATT $a_n$ ÄR TAL (EJ $\pm\infty$) SÅ $|S_k| < \infty$ FÖR VARJE $k$. DETTA BETYDER ATT OM VI VILL AVGÖRA HURUVIDA EN SERIE KONVERGERAR SÅ BEHÖVER VI ENDAST AVGÖRA OM DESS "SVANS" KONVERGERAR.

$$t_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \qquad \text{"SVANSEN"}$$

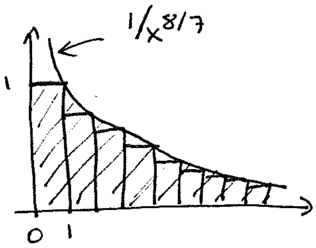
OM $|t_k| < \infty$ FÖR NÅGOT $k$ (KAN VARA VÄLDIGT STORT) DÅ KONVERGERAR SERIEN $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

AVGÖR OM FÖLJANDE SERIER KONVERGERAR:

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{8/7}}$ b) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2+1}$

a) I DET HÄR FALLET AVTAR SUMMANDEN SÅ VI KAN GÖRA FÖLJANDE UPPSKATTNING (RITA FIGUR!):

$$\underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{8/7}}}_{\text{TRAPPSTEGS-FUNKTIONENS AREA}} \leq \underbrace{1}_{\text{FÖRSTA STAPELNS AREA}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{x^{8/7}}}_{\text{AREA UNDER GRAFEN}}$$




$$= 1 - 7\left[x^{-1/7}\right]_1^\infty = 1 + 7 = 8$$

DETTA VISAR ATT SERIEN KONVERGERAR.

b) DEN HÄR SERIEN HAR INTE AVTAGANDE SUMMANDER. DOCK ÄR DE AVTAGANDE FÖR "TILLRÄCKLIGT STORA n", D.V.S.

$\exists N$: $\frac{\ln n}{n^2+1}$ ÄR AVTAGANDE DÅ $n \geq N$

VI FÅR DÅ

$$(1) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n^2+1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+1}$$

DEN FÖRSTA SUMMAN ÄR ÄNDLIG, DEN ANDRA UPPSKATTAS SOM OVAN

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+1} \leq \int_N^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx \leq \int_N^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-x^{-1}\cdot \ln x\right]_N^\infty + \int_N^\infty \frac{dx}{x^2}$$

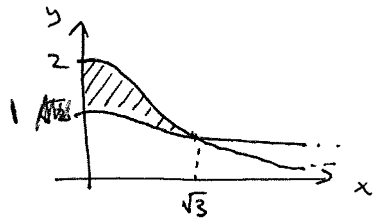
$$= \frac{\ln N}{N} - \left[\frac{1}{x}\right]_N^\infty = \frac{\ln N}{N} + \frac{1}{N} < \infty$$

VILKET VISAR ATT ÄVEN DEN ANDRA ~~SUMMAN~~ SERIEN, (1) ÄR ÄNDLIG. SÅLEDES MÅSTE SERIEN KONVERGERA.

$\boxed{7,2}$ BESTÄM AREAN AV OMRÅDET SOM UPPFYLLER

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le y \le \frac{2}{1+x^2}, \qquad x \ge 0$$

BÅDA GRÄNSER GÅR MOT NOLL DÅ $x \to \infty$ OCH DE AVTAR MONOTONT, DEN ÖVRE GRÄNSEN GÅR FORTARE MOT NOLL SÅ KURVORNA SKÄR VARANDRA I EN PUNKT; SE FIGUR $\rightarrow$




BERÄKNA SKÄRNINGSPUNKT

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow 1+x^2 = 2\sqrt{1+x^2} \xrightarrow{t=1+x^2} t^2 = 4t \overset{(t\neq 0)}{\Longrightarrow} t = 4$$

$$\Rightarrow 1+x^2 = 4 \overset{(x>0)}{\Longrightarrow} x = \sqrt{3}$$

AREAN GES NU AV

$$A = \int_0^{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \left[ 2\cdot\arctan x - \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\arctan\sqrt{3} - \ln\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{1+3}}{0+\sqrt{1+0}}\right) = \frac{2\pi}{3} - \ln\left(\sqrt{3}+2\right)$$

SVAR: $\frac{2\pi}{3} - \ln\left(\sqrt{3}+2\right)$

7.26 BERÄKNA LÄNGDEN AV KURVAN

$$y = \ln(1-x^2), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}$$

KURVANS LÄNGD GES AV

$$\ell = \int_0^{1/2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^{1/2} \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1-2x^2+x^4+4x^2}}{1-x^2}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{(1+x^2)^2}}{1-x^2}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx$$

RATIONELL INTEGRAND: POLYNOMDIVIDERA FÖR ATT FÅ LÄGRE GRAD I TÄLJAREN.

$$\begin{array}{r} -1 \\ 1-x^2 \overline{\big)\, 1+x^2} \\ \underline{-(-1+x^2)} \\ 2 \end{array} \implies \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{2}{(1+x)(1-x)}$$

PARTIALBRÅKSUPPDELA RESTTERMEN.

$$\frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A - Ax + B + Bx}{(1+x)(1-x)}$$

$$\implies \begin{cases} -A+B = 0 \\ A+B = 2 \end{cases} \implies A = B = 1$$

VI KAN NU BERÄKNA LÄNGDEN:

$$\ell = \int_0^{1/2} \left(-1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)dx = \Big[-x + \ln(1+x) - \ln(1-x)\Big]_0^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{3/2}{1/2}\right) = -\frac{1}{2} + \ln 3$$

SVAR: $-\frac{1}{2} + \ln 3$

$\boxed{6.15}$

b) $$\int_0^1 e^x \cdot \ln(1+e^x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right\} = \int_2^{1+e} 1\cdot \ln t \; dt$$

$$= \left[t \cdot \ln t\right]_2^{1+e} - \int_2^{1+e} t \cdot \frac{1}{t}\, dt$$

$$= (1+e)\cdot \ln(1+e) - 2\cdot \ln 2 - (1+e-2)$$

$$= 1 - e + (1+e)\cdot \ln(1+e) - \ln 4$$

---

$\boxed{6.18}$

a) $$\int_1^2 \frac{x \cdot \ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln x\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$\left( \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A + Ax^2 + Bx^2 + Cx}{x(1+x^2)} \implies \left\{ \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{array} \right. \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \ln 2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{10} \cdot \ln 2 + \frac{1}{2}\left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{10}\cdot \ln 2 + \frac{1}{2}\cdot \ln 2 - \frac{1}{4}\ln 5 + \frac{1}{4}\cdot \ln 2$$

$$= \frac{13}{20} \cdot \ln 2 - \frac{1}{4} \cdot \ln 5$$

---