LINJÄR ODE (FÖRSTA ORDNINGEN):

$$\boxed{y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x)}$$

f, g GIVNA
SÖK y(x)

LÖSNING: i) HITTA PRIMITIV $F(x)$ TILL $f(x)$

ii) MULTIPLICERA V-L OCH H-L MED DEN INTEGRERANDE FAKTORN $e^{F(x)}$

$$y'(x) e^{F(x)} + y(x) \cdot \left(f(x) \cdot e^{F(x)} \right) = g(x) \cdot e^{F(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(y(x) \cdot e^{F(x)} \right) = g(x) \cdot e^{F(x)}$$

iii) INTEGRERA

$$y(x) = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) e^{F(x)} dx$$

SEPARABEL ODE (FÖRSTA ORDNINGEN):

$$\boxed{f(y) \cdot y' = g(x)}$$

f, g GIVNA
SÖK y(x)

LÖSNING: i) SKRIV OM EKV.

$$f(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x)$$

ii) "FLYTTA UPP" dx I H-L OCH INTEGRERA

$$\int f(y)\, dy = \int g(x)\, dx$$

iii) FÖRSÖK LÖSA UT y FRÅN V-L EFTER ATT HA INTEGRERAT (GÅR IBLAND).

8.1 BESTÄM SAMTLIGA LÖSNINGAR TILL

$$y' = x^2 - e^{-x}$$

BESTÄM LÖSNINGEN DÅ $y(0) = 1$.

VI SKA ALLTSÅ HITTA ALLA PRIMITIVA FUNKTIONER;

$$y = \int (x^2 - e^{-x})\,dx = \frac{x^3}{3} + e^{-x} + C$$

BEGYNNELSEVÄRDET $y(0)=1$ GER:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= e^{-0} + C = 1 + C \\ y(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad C = 0$$

SVAR: $\begin{cases} y = \frac{x^3}{3} + e^{-x} + C \\ y(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \end{cases}$

$\boxed{8.5}$ LÖS DIFFEKV.:

c) $y' - ky = 0$

DETTA ÄR EN LINJÄR DIFFEKV. AV FÖRSTA ORDNINGEN (KAP. 8.2).

i) ~~INTEGRERANDE FAKTORN~~ PRIMITIV TILL FUNKTIONEN FRAMFÖR y:

$G(x) = -kx \qquad \left(\frac{d}{dx}(-kx) = -k \right)$

ii) MULTIPLICERA MED $e^{G(x)}$ — DEN INTEGRERANDE FAKTORN:

$$e^{-kx} \cdot y' - e^{-kx} \cdot k \cdot y = 0$$

$$y' \cdot e^{-kx} + y \cdot (-k \cdot e^{-kx}) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{-kx}\right) = 0$$

$$y \cdot e^{-kx} = C$$

$$y = C \cdot e^{kx}$$

SVAR: $y = C \cdot e^{kx}$

---

d) $y' + xy = 0$

INTEGRERA x:

$G(x) = \frac{x^2}{2}$

MULTIPLICERA MED INTEGRERANDE FAKTOR:

$$y' e^{x^2/2} + y(x \cdot e^{x^2/2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(y e^{x^2/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y \cdot e^{x^2/2} = C \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot e^{-x^2/2}$$

SVAR: $y = C \cdot e^{-x^2/2}$

$\boxed{8.9}$ LÖS DIFFEKV.:

b) $(1-x^2)y' + xy = x\,, \quad y(0)=3\,, \quad |x|<1$

SKRIV OM PÅ FORMEN $y' + g(x)y = h(x)$:

(i) $$y' + \frac{x}{1-x^2}\cdot y = \frac{x}{1-x^2}$$

LÅT $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$ OCH SÖK PRIMITIV FUNKTION:

$$\int \frac{x\,dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C \overset{|x|<1}{=} \ln(1-x^2)^{-1/2} + C$$

LÅT $G(x) = \ln(1-x^2)^{-1/2}$ OCH MULTIPLICERA V-L OCH H-L I (i) MED DEN INTEGRERANDE FAKTORN $e^{G(x)}$:

$$y'\cdot e^{G(x)} + y\cdot g(x)\cdot e^{G(x)} = g(x)\cdot e^{G(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y\cdot e^{G(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{G(x)}\right)$$

$$y\cdot e^{G(x)} = e^{G(x)} + C$$

$$y = 1 + C\cdot e^{-G(x)}$$

$$= 1 + C\cdot\sqrt{1-x^2}$$

BEGYNNELSEVILLKORET $y(0)=3$ ANVÄNDES FÖR ATT BESTÄMMA C:

$$3 = y(0) = 1 + C\cdot\sqrt{1-0^2} = 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 3-1 = 2$$

SVAR: $y(x) = 1 + 2\sqrt{1-x^2}$

$\boxed{8.21}$ LÖS DIFFEKV. :

d) $y^2 \cdot y' = 2x$, $y(1) = 2$

DETTA ÄR EN SEPARABEL DIFFEKV. (KAP. 8.3, S. 366).

KEDJEREGELN GER

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}y^3\right) = y^2 \cdot y'$$

SÅ DIFFEKV. KAN SKRIVAS

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dx}(y^3) = 2x \implies y^3 = \int 6x\,dx = 6 \cdot \frac{x^2}{2} + C = 3 \cdot x^2 + C$$

BEGYNNELSEVILLKORET $y(1) = 2$ GER

$$2^3 = y(1)^3 = 3 \cdot 1^2 + C \implies C = 8 - 3 = 5$$

SVAR: $y = (3x^2 + 5)^{1/3}$

8.23

b) $y' = e^{x+y}$

DETTA ÄR EN SEPARABEL EKV. SOM KAN SES GENOM ATT MULTIPLICERA V-L OCH H-L MED e^{-y}:

$$e^{-y}y' = e^{-y} \cdot e^{x+y} = e^{-y+x+y} = e^{x}$$

FÖLJANDE ÄR ETT "BEKVÄMT" SÄTT ATT LÖSA SEPARABLA EKVATIONER (SE S. 368, EX 10.):

$$e^{-y} \cdot \frac{dy}{dx} = e^{x}$$

$$\int e^{-y}dy = \int e^{x}dx$$ ("MULTIPLICERA MED dx" OCH INTEGRERA)

$$-e^{-y} = e^{x} + C$$

$$e^{-y} = -e^{x} - C$$

$$-y = \ln(-e^{x} - C)$$

$$y = -\ln(-C - e^{x})$$

OM DENNA LÖSNING SKALL VARA BETYDELSEFULL MÅSTE C VARA NEGATIV ($\ln x$ ÄR DEF. FÖR POSITIVA x) SÅ "DÖP OM" $-C$ TILL C FÖR ATT FÅ SVARET.

SVAR: $y(x) = -\ln(C - e^{x})$ (DEF. FÖR X SÅDANA ATT $C - e^{x} > 0$)

$\boxed{8.71}$ LÅT $T(t)$ BETECKNA INNERTEMPERATUR VID TIDEN t.

GIVET : $-T'(t) = k \cdot (T(t) - (-10))$

$$T(0) = 20$$
$$T(2) = 15$$

SÖKT : $T(24)$?

SKRIV OM DIFFEKVATIONEN:

$$T' + k \cdot T = -10 \cdot k$$

LINJÄR ODE AV FÖRSTA ORDNINGEN. INTEGRERANDE FAKTOR ÄR e^{kt} :

$$T' e^{kt} + T \cdot k \cdot e^{kt} = -10 \cdot k \cdot e^{kt}$$

$$\frac{d}{dt}(T \cdot e^{kt}) = -10 \cdot \frac{d}{dt}(e^{kt})$$

$$T \cdot e^{kt} = -10 \cdot e^{kt} + C$$

$$T(t) = -10 + C \cdot e^{-kt}$$

BESTÄM C OCH k :

$$20 = T(0) = -10 + C \Rightarrow C = 30$$

$$15 = T(2) = -10 + 30 \cdot e^{-2k} \Rightarrow e^{-2k} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow -2k = \ln \frac{5}{6} \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \ln \frac{5}{6} = \frac{1}{2} \ln \frac{6}{5} = \ln \sqrt{\frac{6}{5}}$$

VI FÅR ALLTSÅ ATT TEMPERATUREN VARIERAR ENLIGT:

$$T(t) = -10 + 30 \cdot \left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^{-t}$$

SÅ $T(24) = -10 + 30 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-12} = 30 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 10$

SVAR: $T(24) = 30 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 10$