LINJÄR ODE AV ORDNING TVÅ MED KONSTANTA KOEFFICIENTER:

$$\boxed{y'' + ay' + by = h(x)}$$

h GIVEN FUNKTION
$a, b \in \mathbb{R}$ (EL. $\mathbb{C}$) KONSTANTER

BESTÄM $y(x)$.

LÖSNING: i) BESTÄM ALLA LÖSNINGAR y_h TILL DEN HOMOGENA EKVATIONEN

$$y'' + ay' + by = 0$$

ii) BESTÄM EN LÖSNING y_p (PARTIKULÄRLÖSNING) TILL DEN URSPRUNGLIGA EKVATIONEN.

iii) ALLMÄN LÖSNING GES AV: $y = y_h + y_p$.

i) HITTA RÖTTER r_1 OCH r_2 TILL DET KARAKTERISTISKA POLYNOMET: $r^2 + ar + b$

a) OM $r_1 \neq r_2$ ÄR REELLA: $y_h(x) = A \cdot e^{r_1 x} + B \cdot e^{r_2 x}$

b) OM $r_1 = r_2$ (REELLA): $y_h(x) = (Ax + B) \cdot e^{r_1 x}$

c) OM $r_1 \neq r_2$ ÄR KOMPLEXA: $y_h(x) = e^{\alpha} \cdot (A \cdot \cos \beta x + B \cdot \sin \beta x)$
$r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$

DÄR $A, B \in \mathbb{C}$ ÄR GODTYCKLIGA KONSTANTER. (SE KAP. 8.6)

ii) DENNA KAN VI ENDAST LÖSA FÖR VISSA H-L $h(x)$:

(A) $h(x)$ KONSTANT (SPECIALFALL AV (B)) (S.386)

(B) $h(x)$ POLYNOM (S.386)

(C) $h(x) = p(x) \cdot e^{\alpha x}$, ($p$ POLYNOM) (S.388)

(D) $h(x) = p(x) \cdot \cos x$, $h(x) = p(x) \cdot \sin x$ (S.389)

(E) $h(x) = p(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos x$, $h(x) = p(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin x$ (S. 392)

(F) $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$ DÄR h_1 OCH h_2 HAR NÅGON AV TYPERNA (A) – (E). (S. 393)

SE RESPEKTIVE SIDOR I BOKEN HUR DESSA KAN LÖSAS.

$\boxed{8.38}$ LÖS DIFFEKV.:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

DETTA ÄR EN HOMOGEN LINJÄR ODE AV ANDRA ORDNINGEN MED KONSTANTA KOEFFICIENTER (KAP. 8.6).

DET KARAKTERISTISKA POLYNOMET ÄR $r^2 - 3r + 2$. SÖK RÖTTER:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow \left(r - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} + 2 = 0 \Rightarrow \left(r - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow r = \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}} \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 2$$

RÖTTERNA ÄR REELLA OCH DISTINKTA ($r_1 \neq r_2$) SÅ ENLIGT SATS 2 (S. 378) GES DEN ALLMÄNNA LÖSNINGEN AV

$$y(x) = A \cdot e^{x} + B \cdot e^{2x}$$

DÄR $A, B \in \mathbb{C}$ ÄR GODTYCKLIGA KONSTANTER.

---

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

KARAKTERISTISKA POLYNOMETS RÖTTER:

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2$$

VI HAR EN DUBBELROT (NÖDVÄNDIGTVIS REELL) SÅ DEN ALLMÄNNA LÖSNINGEN ÄR

$$y(x) = (Ax + B)\, e^{2x}$$

DÄR $A, B \in \mathbb{C}$ ÄR GODTYCKLIGA KONSTANTER.

---

c) $y'' - 6y' + 10y = 0$

KARAKTERISTISKA POLYNOMETS RÖTTER

$$r^2 - 6r + 10 = 0 \Rightarrow (r-3)^2 - 9 + 10 = 0 \Rightarrow r = 3 \pm \sqrt{-1} = 3 \pm i$$

RÖTTERNA ÄR KOMPLEXA SÅ LÖSNINGEN GES AV SATS 3 (S. 381):

$$y(x) = e^{3x} \cdot (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x)$$

DÄR $A, B \in \mathbb{C}$ ÄR GODTYCKLIGA KONSTANTER.

$\boxed{8.49}$

b) (i) $y'' - 3y' + 2y = x^2$ (TYP (B))

DETTA ÄR EN ICKE-HOMOGEN LINJÄR ODE AV ORDNING 2 MED KONSTANTA KOEFFICIENTER. DEN ALLMÄNNA LÖSNINGEN GES ENLIGT SATS 1 (S. 376) AV

(ii) $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

DÄR $y_h(x)$ ÄR EN LÖSNING TILL DEN HOMOGENA EKVATIONEN

(iii) $y'' - 3y' + 2y = 0$

OCH $y_p(x)$ ÄR EN PARTIKULÄRLÖSNING TILL (i).

LÖS (iii) FÖRST. KARAKTERISTISK EKVATION:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \implies \left(r - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0 \implies r = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

HITTA EN PARTIKULÄRLÖSNING. H-L I (i) ÄR ETT POLYNOM AV GRAD 2 SÅ ANSÄTT

$$y(x) = ax^2 + bx + c, \quad y'(x) = 2ax + b, \quad y''(x) = 2a$$

DETTA GER V-L

$$2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2ax^2 + (2b - 6a)x + 2c - 3b + 2a$$

OCH H-L ÄR x^2. OM LIKHET SKALL GÄLLA SÅ MÅSTE KOEFFICIENTERNA ÖVERENSSTÄMMA:

$$\left.\begin{aligned} 2a &= 1 \\ 2b - 6a &= 0 \\ 2c - 3b + 2a &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &a = \frac{1}{2} \\ &2b - 6 \cdot \frac{1}{2} = 0 \implies b = \frac{3}{2} \\ &2c - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \implies c = +\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = +\frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\implies y_p(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4} = \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 7)$$

LÖSNINGEN BLIR ENLIGT (ii):

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} + \frac{x^2 + 6x + 7}{4}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

$\boxed{8.49}$

d) $y'' + 2y' = x^2 + 1$ (TYP (B))

SÖK HOMOGEN LÖSNING ($y''+2y'=0$):

$$r^2+2r=0 \Rightarrow r(r+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} r=0 \\ r=-2 \end{cases}$$

$$y_h(x) = A\cdot e^{0\cdot x} + B\cdot e^{-2\cdot x} = A + B\cdot e^{-2x}, \qquad A,B \in \mathbb{C}$$

SÖK PARTIKULÄRLÖSNING. ANSÄTT $y(x) = x\cdot(ax^2+bx+c)$:

$$y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$y''(x) = 6ax + 2b$$

V-L: $6ax + 2b + 2(3ax^2+2bx+c) = 6ax^2 + (4b+6a)x + 2c + 2b$

H-L: x^2+1

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2c+2b &= 1 \\ 4b+6a &= 0 \\ 6a &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &a = \tfrac{1}{6} \\ &4b + 6\cdot\tfrac{1}{6} = 0 \Rightarrow b = -\tfrac{1}{4} \\ &2c + 2\cdot(-\tfrac{1}{4}) = 1 \Rightarrow c = \tfrac{1}{2}\cdot(1+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

$$y_p(x) = x\cdot\left(\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4}\right)$$

DEN ALLMÄNA LÖSNINGEN GES AV

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A + Be^{-2x} + x\cdot\left(\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4}\right)$$

DÄR $A,B \in \mathbb{C}$ ÄR KONSTANTER.

$\boxed{8.61}$

a) $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ (TYP (c))

i) HOMOGEN LÖSNING. KAR. EKV.:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow \left(r - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = 2 \end{cases}$$

$$y_h(x) = A \cdot e^x + B \cdot e^{2x}$$

ii) PARTIKULÄRLÖSNING. H-L ÄR AV TYPEN "POLYNOM · EXPONENTIAL"
SÅ ANSÄTT ~~MAN~~ $y(x) = z(x) \cdot e^{5x}$:

$$y' = z' \cdot e^{5x} + z \cdot 5e^{5x} = e^{5x} \cdot (z' + 5z)$$

$$y'' = 5e^{5x} \cdot (z' + 5z) + e^{5x} \cdot (z'' + 5z') = e^{5x} \cdot (z'' + 10z' + 25z)$$

SÄTT IN I V-L:

$$e^{5x} \cdot \left(z'' + 10z' + 25z - 3 \cdot (z' + 5z) + 2 \cdot z\right)$$

$$= e^{5x} \cdot (z'' + 7z' + 12z)$$

FÖR ATT DETTA SKA STÄMMA MED H-L SÅ:

$$e^{5x} \cdot (z'' + 7z' + 12z) = e^{5x}$$

$$\Rightarrow z'' + 7z' + 12z = 1$$

EN PARTIKULÄRLÖSNING TILL DENNA EKVATION ÄR $z = K$:

$$z = K \Rightarrow z' = 0 = z''$$

$$\Rightarrow 0 + 7 \cdot 0 + 12 \cdot K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{12}$$

SLUTLIGEN FÅR VI

$$y_p(x) = z_p(x) \cdot e^{5x} = \frac{1}{12} \cdot e^{5x}$$

ALLMÄN LÖSNING ÄR $y = y_h + y_p$.

SVAR: $y(x) = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{12}e^{5x}$

$\boxed{8.51}$

d) $y'' + 2y' + y = x \cdot e^{-x}, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$ (TYP (c))

i) HOMOGEN LÖSNING:

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \implies (r+1)^2 = 0 \implies r = -1$$

$$y_h(x) = (Ax + B) \cdot e^{-x}$$

ii) PARTIKULÄRLÖSNING:

ANSÄTT $y(x) = z(x) \cdot e^{-x}$:

$$y' = z' \cdot e^{-x} - z \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (z' - z)$$

$$y'' = -e^{-x} \cdot (z' - z) + e^{-x} \cdot (z'' - z') = e^{-x} \cdot (z'' - 2z' + z)$$

V-L: $e^{-x} \cdot \left(z'' - 2z' + z + 2(z' - z) + z\right) = e^{-x} \cdot z''$

H-L: $x \cdot e^{-x}$

$$\implies z'' = x$$

PARTIKULÄRLÖSNING: $z_p = \dfrac{x^3}{6}$ $\qquad \left(z' = \dfrac{3x^2}{6} = \dfrac{x^2}{2}, \ z'' = \dfrac{2x}{2} = x\right)$

$$\implies y_p = z_p \cdot e^{-x} = \frac{x^3}{6} \cdot e^{-x}$$

iii) ALLMÄN LÖSNING:

$$y = y_h + y_p = (Ax + B)e^{-x} + \frac{x^3}{6} \cdot e^{-x} = \left(\frac{x^3}{6} + Ax + B\right)e^{-x}$$

iv) BESTÄM A, B FRÅN BEGYNNELSEVILLKOR:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = y(0) = B \\ y'(x) = -e^{-x} \cdot \left(\frac{x^3}{6} + Ax + B\right) + e^{-x} \cdot \left(\frac{3x^2}{6} + A\right) \\ 0 = y'(0) = -B + A = -1 + A \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \end{array}\right.$$

SVAR: $y(x) = \left(\dfrac{x^3}{6} + x + 1\right) \cdot e^{-x}$

8.56

a) (i) $y'' - 2y' - y = \sin 3x$ (TYP (D))

HOMOGEN LÖSNING:

$$r^2 - 2r - 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 - 2 = 0 \Rightarrow r = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$y_h(x) = A \cdot e^{(1+\sqrt{2})x} + B \cdot e^{(1-\sqrt{2})x}$$

PARTIKULÄRLÖSNING: NÄR sin/cos DYKER UPP I H-L LÖSER MAN ISTÄLLET EN HJÄLPEKVATION (SE S.390) MED KOMPLEXA METODER:

(ii) $u'' - 2u' - u = e^{i3x}$ (KOM IHÅG: $e^{i3x} = \cos 3x + i\sin 3x$)

FÖR ATT HITTA PARTIKULÄRLÖSNING TILL (ii) ANVÄNDER VI SAMMA METOD SOM TIDIGARE:

$$u = z \cdot e^{i3x}$$

$$u' = z' \cdot e^{i3x} + z \cdot 3i \cdot e^{i3x} = e^{i3x} \cdot (z' + 3iz)$$

$$u'' = 3i \cdot e^{i3x} \cdot (z' + 3iz) + e^{i3x} \cdot (z'' + 3iz') = e^{i3x} \cdot (z'' + 6iz' - 9z)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{V-L (ii)}: \quad e^{i3x} \cdot (z'' + 6iz' - 9z - 2(z' + 3iz) - z) \\ \text{H-L (ii)}: \quad e^{i3x} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow z'' + 6iz' - (10 + 6i)z = 1 \Rightarrow z_p = -\frac{1}{10+6i} = -\frac{10-6i}{10^2+6^2} = -\frac{10-6i}{136}$$

$$u_p = z_p \cdot e^{i3x} = -\frac{10-6i}{136} \cdot (\cos 3x + i\sin 3x) = -\frac{1}{136} \cdot (10\cos 3x + 6\sin 3x)$$

$$- \frac{i}{136} \cdot (10\sin 3x - 6\cos 3x)$$

FRÅN u_p ÅTERFÅS y_p SOM IMAGINÄRDELEN AV u_p (TY VI HADE sin I H-L (i)):

$$y_p = \operatorname{Im} u_p = -\frac{10\sin 3x - 6\cos 3x}{136} = \frac{3\cos 3x - 5\sin 3x}{68}$$

DEN ALLMÄNNA LÖSNINGEN GES AV $y = y_h + y_p$.

SVAR: $y(x) = A \cdot e^{(1+\sqrt{2})x} + B \cdot e^{(1-\sqrt{2})x} + \dfrac{3 \cdot \cos 3x - 5 \cdot \sin 3x}{68}$

$\boxed{8.58}$

a) (i) $y'' - 6y' + 10y = e^{3x} \cdot \cos x$ (TYP (E))

HOMOGEN LÖSNING:

$$r^2 - 6r + 10 = 0 \implies (r-3)^2 + 1 = 0 \implies r = 3 \pm \sqrt{-1} = 3 \pm i$$

$$y_h(x) = e^{3x} \cdot (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x)$$

PARTIKULÄRLÖSNING: INFÖR HJÄLPEKVATIONEN

(ii) $u'' - 6u' + 10u = e^{3x} \cdot e^{ix} = e^{(3+i)x}$

$$u = z \cdot e^{(3+i)x}$$

$$u' = z' \cdot e^{(3+i)x} + z \cdot (3+i) \cdot e^{(3+i)x} = e^{(3+i)x} \cdot (z' + (3+i)z)$$

$$u'' = (3+i)e^{(3+i)x} \cdot (z' + (3+i)z) + e^{(3+i)x} \cdot (z'' + (3+i)z')$$

$$= e^{(3+i)x} \cdot (z'' + 2(3+i)z' + (3+i)^2 z)$$

V-L(ii): $e^{(3+i)x} \cdot (z'' + 2(3+i)z' + (3+i)^2 z - 6(z' + (3+i)z) + 10z)$

$$= e^{(3+i)x} \cdot (z'' + 6z' + 2iz' + (9 - 1 + 6i)z - 6z' - 18z - 6iz + 10z)$$

$$= e^{(3+i)x} \cdot (z'' + 2iz')$$

H-L(ii): $e^{(3+i)x}$

$$\implies z'' + 2iz' = 1 \implies z_p' = \frac{1}{2i} \implies z_p = \frac{x}{2i} = -\frac{ix}{2}$$

$$u_p = z_p \cdot e^{(3+i)x} = -\frac{ix}{2} e^{3x} (\cos x + i \sin x) = -\frac{xe^{3x}}{2} \cdot (-\sin x + i \cos x)$$

PARTIKULÄRLÖSNING TILL (i) GES AV REALDELEN AV u_p (TY VI HADE cos I H-L(i)):

$$y_p = \operatorname{Re} u_p = \frac{x \cdot e^{3x}}{2} \cdot \sin x$$

ALLMÄN LÖSNING: $y = y_h + y_p$.

SVAR: $y(x) = e^{3x} \cdot \left(A \cdot \cos x + B \cdot \sin x + \frac{x}{2} \cdot \sin x\right)$

8.19 LÅT $y(t)$ BETECKNA ANTALET MJUKA KLAPPAR VID TIDEN t. LÅT $t=0$ VARA TIDPUNKTEN DÅ SÅSONGEN STARTAR. GIVET:

$$(*) \quad y'(t) = \underbrace{-2k\cdot y(t)}_{\text{LEVERANSHAST. UT IFRÅN LAGRET}} + \underbrace{k\cdot(\overbrace{M - y(t)}^{\text{ANTAL HÅRDA KLAPPAR}})}_{\text{LEVERANSHAST. IN TILL LAGRET}}$$

$$y(0) = M/2$$ (LIKA MÅNGA HÅRDA SOM MJUKA KLAPPAR I SÅSONGSSTARTEN)

HÄR BETECKNAR M DET TOTALA ANTALET KLAPPAR (SOM ÄR KONSTANT) OCH PROPORTIONALITETSKONSTANTEN k ÄR OKÄND.

$(*)$ ÄR EN LINJÄR ODE AV ORDNING ETT.

i) SKRIV OM $(*)$ PÅ STANDARD FORM:

$$y' + 3k\cdot y = k\cdot M$$

ii) SÖK PRIMITIV TILL $f(t) = 3k$:

$$F(t) = 3\cdot k\cdot t \qquad (\Rightarrow F'(t) = 3k = f(t))$$

iii) FÖRLÄNG MED INTEGRERANDE FAKTOR:

$$y' e^{3kt} + 3ky\, e^{3kt} = kM\, e^{3kt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(y\cdot e^{3kt}\right) = \frac{M}{3}\cdot\frac{d}{dt}\left(e^{3kt}\right)$$

$$y\cdot e^{3kt} = \frac{M}{3}\cdot e^{3kt} + C$$

$$y = \frac{M}{3} + C\cdot e^{-3kt}$$

iv) ANVÄND BEGYNNELSEVILLKORET FÖR ATT BESTÄMMA C:

$$\frac{M}{2} = y(0) = \frac{M}{3} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{M}{2} - \frac{M}{3} = \frac{M}{6}$$

SVAR: $y(t) = \dfrac{M}{3} + \dfrac{M}{6}\cdot e^{-3kt}$