$\boxed{8.58}$

a) (i) $y'' - 6y' + 10y = e^{3x} \cdot \cos x$ (TYP (E))

HOMOGEN LÖSNING:

$$r^2 - 6r + 10 = 0 \implies (r-3)^2 + 1 = 0 \implies r = 3 \pm \sqrt{-1} = 3 \pm i$$

$$y_h(x) = e^{3x} \cdot (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x)$$

PARTIKULÄRLÖSNING: INFÖR HJÄLPEKVATIONEN

(ii) $u'' - 6u' + 10u = e^{3x} \cdot e^{ix} = e^{(3+i)x}$

$$u = z \cdot e^{(3+i)x}$$

$$u' = z' \cdot e^{(3+i)x} + z \cdot (3+i) \cdot e^{(3+i)x} = e^{(3+i)x} \cdot (z' + (3+i)z)$$

$$u'' = (3+i)e^{(3+i)x} \cdot (z' + (3+i)z) + e^{(3+i)x} \cdot (z'' + (3+i)z')$$

$$= e^{(3+i)x} \cdot (z'' + 2(3+i)z' + (3+i)^2 z)$$

V-L(ii): $e^{(3+i)x} \cdot (z'' + 2(3+i)z' + (3+i)^2 z - 6(z' + (3+i)z) + 10z)$

$$= e^{(3+i)x} \cdot (z'' + \cancel{6z'} + 2iz' + (\cancel{9} - \cancel{1} + \cancel{6i})z - \cancel{6z'} - \cancel{18z} - \cancel{6iz} + \cancel{10z})$$

$$= e^{(3+i)x} \cdot (z'' + 2iz')$$

H-L(ii): $e^{(3+i)x}$

$$\implies z'' + 2iz' = 1 \implies z_p' = \frac{1}{2i} \implies z_p = \frac{x}{2i} = -\frac{ix}{2}$$

$$u_p = z_p \cdot e^{(3+i)x} = -\frac{ix}{2} e^{3x} (\cos x + i \sin x) = -\frac{xe^{3x}}{2} \cdot (-\sin x + i \cos x)$$

PARTIKULÄRLÖSNING TILL (I) GES AV REALDELEN AV u_p (TY VI HADE COS I H-L(I)):

$$y_p = \operatorname{Re} u_p = \frac{x \cdot e^{3x}}{2} \cdot \sin x$$

ALLMÄN LÖSNING: $y = y_h + y_p$.

SVAR: $y(x) = e^{3x} \cdot \left(A \cdot \cos x + B \cdot \sin x + \frac{x}{2} \cdot \sin x\right)$

8.19 LÅT $y(t)$ BETECKNA ANTALET MJUKA KLAPPAR VID TIDEN t. LÅT $t=0$ VARA TIDPUNKTEN DÅ SÅSONGEN STARTAR. GIVET:

$$(*) \quad y'(t) = \underbrace{-2k\cdot y(t)}_{\substack{\text{LEVERANSHAST.}\\ \text{UT IFRÅN LAGRET}}} + \underbrace{k\cdot(\overbrace{M-y(t)}^{\text{ANTAL HÅRDA KLAPPAR}})}_{\substack{\text{LEVERANSHAST. IN}\\ \text{TILL LAGRET}}}$$

$$y(0) = M/2 \qquad \text{(LIKA MÅNGA HÅRDA SOM MJUKA KLAPPAR I SÅSONGSSTARTEN)}$$

HÄR BETECKNAR M DET TOTALA ANTALET KLAPPAR (SOM ÄR KONSTANT) OCH PROPORTIONALITETSKONSTANTEN k ÄR OKÄND.

$(*)$ ÄR EN LINJÄR ODE AV ORDNING ETT.

i) SKRIV OM $(*)$ PÅ STANDARDFORM:

$$y' + 3k\cdot y = k\cdot M$$

ii) SÖK PRIMITIV TILL $f(t) = 3k$:

$$F(t) = 3\cdot k\cdot t \qquad (\Rightarrow F'(t) = 3k = f(t))$$

iii) FÖRLÄNG MED INTEGRERANDE FAKTOR:

$$y'e^{3kt} + 3ky\,e^{3kt} = kM\,e^{3kt}$$

$$\frac{d}{dt}(y\cdot e^{3kt}) = \frac{M}{3}\cdot\frac{d}{dt}(e^{3kt})$$

$$y\cdot e^{3kt} = \frac{M}{3}\cdot e^{3kt} + C$$

$$y = \frac{M}{3} + C\cdot e^{-3kt}$$

iv) ANVÄND BEGYNNELSEVILLKORET FÖR ATT BESTÄMMA C:

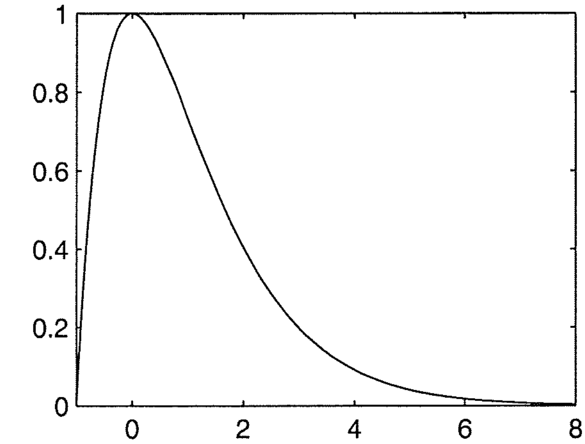
$$\frac{M}{2} = y(0) = \frac{M}{3} + C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{M}{2} - \frac{M}{3} = \frac{M}{6}$$

SVAR: $y(t) = \dfrac{M}{3} + \dfrac{M}{6}\cdot e^{-3kt}$

LÖSNINGAR TILL HOMOGENA EKV.

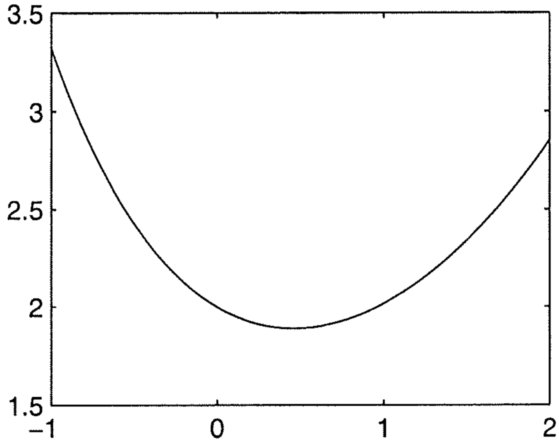
(DUBBELROT)

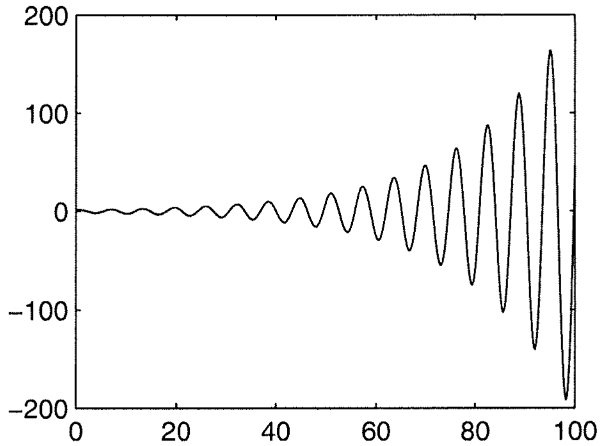
$(x+1)\,e^{-x}$



(REELLA RÖTTER)

$e^{x/2}+e^{-x}$





$e^{x/20}\cdot(\cos x + \sin x)$

(KOMPLEXA RÖTTER)

TAYLORUTVECKLING

OM $f, f', \ldots, f^{(n+1)}$ ÄR KONTINUERLIGA I EN OMGIVNING U AV a, DÅ:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1},$$

FÖR ALLA $x \in U$. PUNKTEN ξ LIGGER MELLAN a OCH x, SAMT SÅ BEROR ξ BÅDE PÅ x OCH n.

(JÄMFÖR MED MEDELVÄRDESSATSEN DÅ $n=0$.)

OBS! VIKTIGT ATT KONTINUITET GÄLLER I EN OMGIVNING, ANNARS KAN VI FÅ PROBLEM.

EX $f(x) = \sqrt{x}$, $a=0$

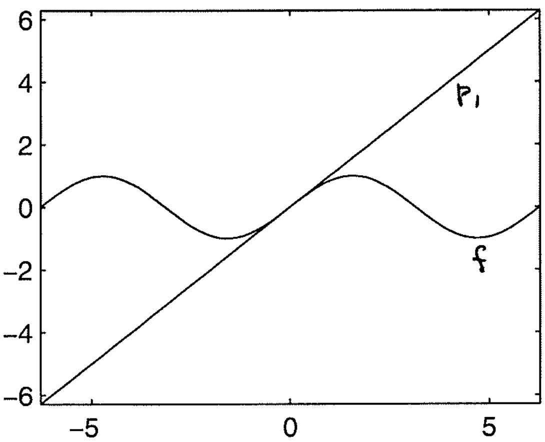
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ← GÅR MOT ∞ DÅ $x \to 0^+$!

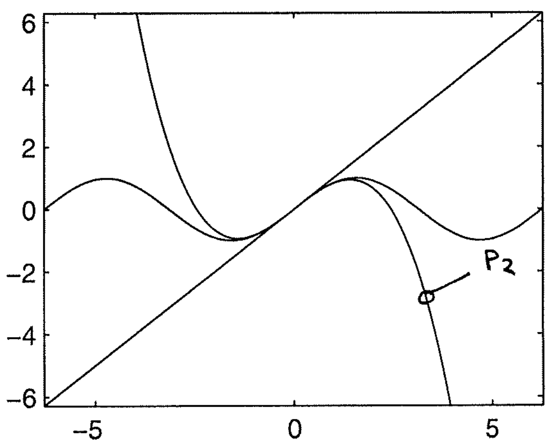
PROBLEM: $f(0) + f'(0)\cdot x = 0 + \underline{\underline{\dfrac{1}{2\sqrt{0}}}}\cdot x$ NEJ!

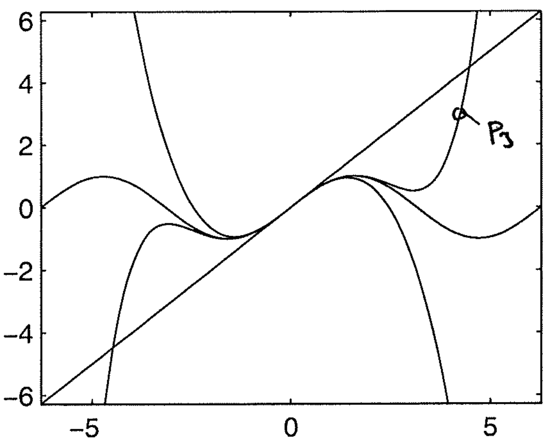
$$\boxed{f(x) = \sin x}$$

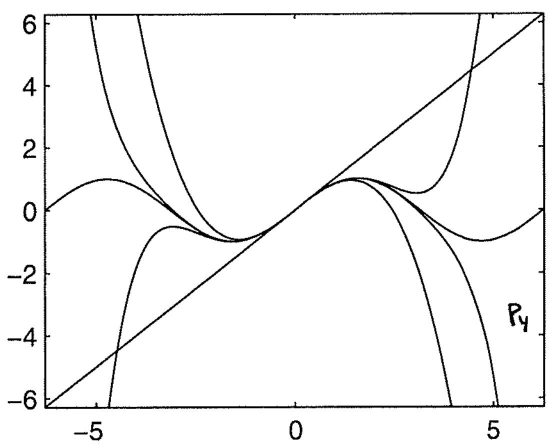
$P_1(x) = x$

$P_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}$









$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

$\boxed{9.5}$ TAYLORUTVECKLA $f(x) = \sqrt{x}$ KRING $x = 2$ TILL ORDNING 2.

TAYLORS FORMEL:

$$f(x) = f(2) + f'(2) \cdot (x-2) + \frac{f''(2)}{2!} \cdot (x-2)^2 + \frac{f^{(3)}(2)}{3!} \cdot (x-2)^3 + \cdots$$

DERIVERA:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}} \Rightarrow f''(2) = -\frac{1}{4 \cdot 2^{3/2}} = -\frac{1}{8 \cdot 2^{1/2}}$$

SVAR: $\sqrt{2} + \frac{x-2}{2\sqrt{2}} - \frac{(x-2)^2}{16\sqrt{2}}$

$\boxed{9.6}$ TAYLORUTVECKLA $f(x) = \tan x$ KRING $x = 0$ TILL ORDNING 2.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -2 \cdot (\cos x)^{-3} \cdot (-\sin x) \qquad f''(0) = 0$$

ANDRA ORDNING:

$$f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2} \cdot x^2 = x$$

SVAR: x

$\boxed{9.8}$ $f(x) = \sqrt{1+x}$

a) $P_1(x) = f(0) + f'(0)\cdot x = 1 + \frac{x}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

b) FIGUR

c) $R_2(x) = \frac{f''(\theta x)}{2!}\cdot x^2 = -\frac{x^2}{8(1+x)^{3/2}}$, $0 \le \theta \le 1$

$f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}$

d) OM $x \ge 0$ DÅ

$|R_2(x)| = \frac{x^2}{8(1+x)^{3/2}} \le \frac{x^2}{8}$

e) OM $0 \le x \le 0.1$ DÅ

$|R_2(x)| \le \frac{x^2}{8} \le \frac{0.1^2}{8} = \frac{1}{800} = \frac{1}{8}\cdot 10^{-2} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-2} = 5\cdot 10^{-3}$

VI FÅR ALLTSÅ TVÅ KORREKTA DECIMALER.

$f(0.08) \approx 1.0392$, $P_1(0.08) \approx 1.0400$

f) OM $0 \le x < a$ DÅ

$|R_2(x)| \le \frac{a^2}{8} \le 5\cdot 10^{-4}$

$\Rightarrow a \le \sqrt{40\cdot 10^{-4}} = \sqrt{40}\cdot 10^{-2}$

g) $P_2(x) = P_1(x) + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

h) FIGUR

i) $R_3(x) = \frac{f'''(\theta x)}{3!}\cdot x^3 = \frac{x^3}{16\cdot(1+\theta x)^{5/2}}$, $0 \le \theta \le 1$

$f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$

j) OM $x \ge 0$ DÅ

$|R_3(x)| = \frac{x^3}{16(1+\theta x)^{5/2}} \le \frac{x^3}{16}$

k) OM $0 \le x \le 0.1$ DÅ

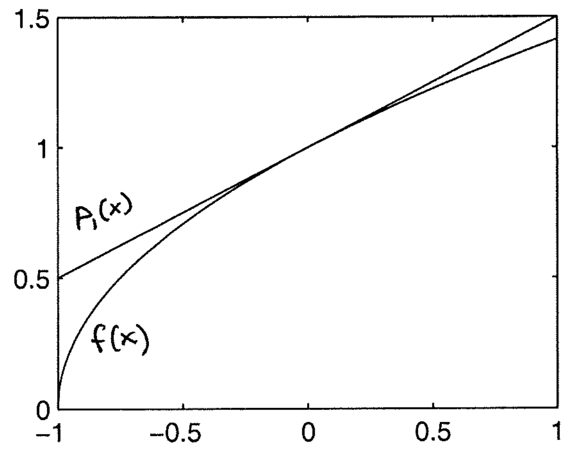
$|R_3(x)| \le \frac{x^3}{16} \le \frac{1}{16000} = \frac{1}{16}\cdot 10^{-3} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-3} = 5\cdot 10^{-4}$

D.V.S. TRE KORREKTA DECIMALER.

$f(0.08) \approx 1.0392$, $P_2(0.08) \approx 1.0392$

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$P_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$$



$$P_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$