$\boxed{9.12}$ VISA ATT $\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{8|x|^3}{3}$, OM $|x| \leq \frac{1}{2}$

LÅT $f(x) = \ln(1+x)$ OCH TAYLORUTVECKLA RUNT $x = 0$
MED TREDJE ORDNINGENS FELTERM!

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(\theta x)}{3!}\cdot x^3$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\theta x)^3}, \qquad 0 \leq \theta \leq 1$$

D.V.S

$$(*) \quad \left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| = \left| \frac{x^3}{3(1+\theta x)^3} \right|$$

OM $|x| \leq \frac{1}{2}$ DÅ $1 + \theta x \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ SÅ

$$(*) \leq \frac{|x|^3}{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{8}{3}|x|^3$$

VILKET SKULLE VISAS.

9.22 TAYLORUTVECKLA TILL ORDNING 3 KRING $x=0$. ANGE RESTTERM SOM $x^n B(x)$, DÄR B BEGRÄNSAD.

a) $f(x) = e^{2x}$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = 2e^{2x}$ $\quad f'(0) = 2$

$f''(x) = 2^2 \cdot e^{2x}$ $\quad f''(0) = 4$

$f'''(x) = 2^3 \cdot e^{2x}$ $\quad f'''(0) = 8$

$f^{(4)}(x) = 2^4 \cdot e^{2x}$ $\quad \leftarrow$ OBS! BEGRÄNSAD FÖR x NÄRA 0

TAYLORUTVECKLING GER:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + x^4 \cdot B(x)$$

$$= 1 + 2x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{8}{6}x^3 + x^4 \cdot B(x)$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^4 \cdot B(x)$$

SVAR: $f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^4 \cdot B(x)$, FÖR x NÄRA 0.

ALTERNATIVT KAN VI ANVÄNDA STANDARDUTVECKLINGEN:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + t^4 \cdot B_1(x)$$

DÅ $x \approx 0$ SÅ ÄR $t = 2x \approx 0$ OCKSÅ, SÅ VI KAN SÄTTA IN $t = 2x$ I OVANSTÅENDE FORMEL:

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3!} + (2x)^4 \cdot B_1(x)$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^4 \cdot B_2(x)$$

$\boxed{9.23}$ TAYLORUTVECKLA TILL ORDNING 2 KRING $x = 0$. ANGE RESTTERM SOM $x^n \cdot B(x)$.

b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $\qquad f'(0) = -1$

$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $\qquad f''(0) = 2$

$f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$ $\qquad \leftarrow$ OBS! BEGRÄNSAD I NÄRHETEN AV $x=0$
(MÅSTE HA $x \geq a > -1$.)

TAYLORUTVECKLING GER:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2} + x^3 \cdot B(x)$$

$$= 1 - x + x^2 + x^3 \cdot B(x)$$

SVAR: $f(x) = 1 - x + x^2 + x^3 \cdot B(x)$, FÖR x NÄRA 0 $(x \geq a > -1.)$

OBS: DENNA FUNKTIONS TAYLORSERIE GES AV GEOMETRISK SERIE:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k}_{\text{GEOMETRISK SERIE}}$$

(KONVERGERAR FÖR $|x| < 1$.)

$\boxed{9.28}$ TAYLORUTVECKLA KRING $x=0$ TILL ORDNING 4. ANGE RESTTERM SOM $x^n \cdot B(x)$.

b) $f(x) = e^{\cos x}$

VI SKULLE KUNNA DERIVERA FYRA GÅNGER MEN DETTA BLIR JOBBIGT (PRÖVA!). ISTÄLLET ANVÄNDER VI STANDARDUTVECKLINGARNA FÖR $\cos x$ OCH e^t:

(i) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^6 \cdot B_1(x)$ $(x \approx 0)$

(ii) $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^3 \cdot B_2(x)$ $(t \approx 0)$

SÄTT IN (i) I (ii):

$$e^{\cos x} = \exp\Big\{\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^6 \cdot B_1(x)}_{\approx 1 \text{ FÖR } x \approx 0, \text{ SÅ SKRIV OM FÖRST}}\Big\} = e^1 \cdot \exp\Big\{\underbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^6 \cdot B_1(x)}_{\approx 0 \text{ FÖR } x \approx 0 \text{ SÅ (ii) KAN TILLÄMPAS}}\Big\}$$

$$= e \cdot \Big\{1 + \Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^6 \cdot B_1(x)\Big) + \frac{1}{2}\Big(-\frac{x^2}{2} + x^4 \cdot B_3(x)\Big)^2 + \big(x^2 \cdot B_4(x)\big)^3 \cdot B_2(x)\Big\}$$

$$= e \cdot \Big\{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{1}{2} \cdot \Big(-\frac{x^2}{2}\Big)^2 + x^6 \cdot B_5(x)\Big\}$$

$$= e \cdot \Big\{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + x^6 \cdot B_5(x)\Big\}$$

$$= e - \frac{e \cdot x^2}{2} + \frac{e \cdot x^4}{6} + x^6 \cdot B_6(x)$$

SVAR: $f(x) = e - \frac{e}{2} \cdot x^2 + \frac{e}{6} \cdot x^4 + x^6 \cdot B(x)$ $(x \approx 0)$

$\boxed{9.30}$ BERÄKNA GRÄNSVÄRDET

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}$$

VI SER ATT BÅDE TÄLJARE OCH NÄMNARE $\to 0$ DÅ $x \to 0$. GENOM ATT TAYLORUTVECKLA TÄLJARE OCH NÄMNARE KRING $x=0$ SÅ FÅR VI MER INFORMATION OM HUR "FORT" DE NÄRMAR SIG NOLL OCH PÅ SÅ SÄTT KAN VI BERÄKNA GRÄNSVÄRDET:

(i) $1-\cos x = 1-\left(1-\frac{x^2}{2}+x^4\cdot B_1(x)\right) = \frac{x^2}{2} - x^4\cdot B_1(x)$

(ii) $\ln(1+x)-x = x-\frac{x^2}{2}+x^3\cdot B_2(x) - x = -\frac{x^2}{2}+x^3\cdot B_2(x)$

(i) OCH (ii) GER

$$\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x} = \frac{\frac{x^2}{2}-x^4\cdot B_1(x)}{-\frac{x^2}{2}+x^3\cdot B_2(x)} = \frac{1-\overbrace{x^2\cdot B_3(x)}^{\to 0}}{-1+\underbrace{x\cdot B_4(x)}_{\to 0}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{-1} = -1$$

SVAR: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x} = -1$

VI KAN ÄVEN LÖSA UPPGIFTEN MED L'HOSPITALS REGEL:

$f(x) = 1-\cos x$, $\quad f'(x) = \sin x$

$g(x) = \ln(1+x)-x$, $\quad g'(x) = \frac{1}{1+x}-1$

NU ÄR $g'(0) = 0 = f'(0)$ SÅ VI TILLÄMPAR L'HOSPITAL EN GÅNG TILL:

$f''(x) = \cos x \qquad f''(0) = 1$

$g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad g''(0) = -1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(0)}{g''(0)} = -1$$

L'HOSPITALS REGEL:

SÄG ATT VI VILL BERÄKNA

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

DÄR $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ DÅ $x \to 0$. OM f, g HAR KONTINUERLIGA ANDRA-DERIVATOR SÅ KAN VI TAYLORUTVECKLA:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0) + f'(0)x + x^2 \cdot B_1(x)}{g(0) + g'(0)x + x^2 \cdot B_2(x)} \underset{f(0)=g(0)=0}{\uparrow=} \frac{f'(0) + x \cdot B_1(x)}{g'(0) + x \cdot B_2(x)}$$

OM DESSUTOM $g'(0) \neq 0$ SÅ KAN VI TA GRÄNSER

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(0) + x \cdot B_1(x)}{g'(0) + x \cdot B_2(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

SATS: OM f'', g'' ÄR KONT. I EN OMGIVNING TILL 0 OCH OM $g'(0) \neq 0$, DÅ GÄLLER

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

OBS: IBLAND HÄNDER ATT $f'(0) = 0 = g'(0)$. DÅ KAN MAN FÖRSÖKA ATT UPPREPA SATSEN, D.V.S. BETRAKTA $f''(x)/g''(x)$. (KRÄVS NU ATT f''', g''' ÄR KONT OCH $g''(0) \neq 0$.)