$\boxed{9.39}$ BERÄKNA $\lim_{n\to\infty} x_n$ OM x_n BETECKNAR LÖSNINGEN TILL

(*) $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+x} = e$$

LÖS UT x_n :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+x_n} = e \implies (n+x_n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln e$$

$$\implies x_n = \frac{1-n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

DÅ $n\to\infty$ SÅ $\frac{1}{n}\to 0$. TAYLORUTVECKLA $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ NÄRA 0:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{(1/n)^2}{2} + \frac{(1/n)^3}{3} - \dots$$

VI FÅR ATT

$$x_n = \frac{1-n\cdot\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^3}\cdot B_1(x)\right)}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\cdot B_2(x)} = \frac{1-1+\frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2}B_1(x)}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\cdot B_2(x)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\cdot B_1(x)}{1-\frac{1}{n}\cdot B_2(x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

SVAR: $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$

$\boxed{9.44}$ BERÄKNA GRÄNSVÄRDET

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x\cdot\left((1+x)^{1/3} - e^{x/3}\right)} \qquad (*)$$

ANVÄND STANDARDUTVECKLINGARNA:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

DETTA GER:

$$(*) = \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{3} + x^5\cdot B_1(x) - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + x^5\cdot B_2(x)\right)}{x\cdot\left(\cancel{1+\frac{x}{3}} + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + x^3\cdot B_3(x) - \left(\cancel{1+\frac{x}{3}} + \frac{(x/3)^2}{2} + x^3\cdot B_4(x)\right)\right)}$$

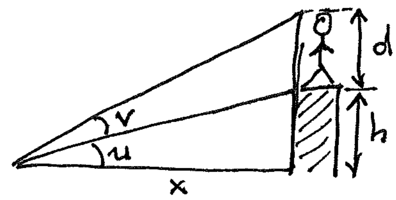
$$= \frac{-\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6} + x^5\cdot B_5(x)}{x\cdot\left(-\frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{18} + x^3\cdot B_6(x)\right)} = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + x^2\cdot B_5(x)}{-\frac{1}{9} - \frac{1}{18} + x\cdot B_6(x)} = \frac{-\frac{1}{6} + x^2\cdot B_5(x)}{-\frac{1}{6} + x\cdot B_6(x)}$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{6}} = 1$$

SVAR: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x\cdot\left((1+x)^{1/3} - e^{x/3}\right)} = 1$

SB1135
TEN-I
7/11-05

10. OSQUAR TITTAR PÅ EN STATY SOM STÅR PÅ EN PIEDESTAL. FOTEN PÅ STATYN STÅR PÅ HÖJDEN h ÖVER OSQUARS ÖGON, OCH STATYN ÄR d HÖG. PÅ VILKET AVSTÅND x SKALL OSQUAR STÅ FRÅN STATYN FÖR ATT HAN SKALL SE DEN UNDER MAXIMAL VINKEL v?



VI SKA ALLTSÅ HITTA DET x SOM MAXIMERAR VINKELN $v(x)$. STÄLL UPP SAMBAND:

$$\text{(i)} \quad \tan(u+v) = \frac{d+h}{x}, \quad \text{(ii)} \quad \tan u = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow u+v = \arctan\left(\frac{d+h}{x}\right), \quad u = \arctan\left(\frac{h}{x}\right)$$

(OBS! $0 \leq u+v \leq \pi/2$, $0 \leq u \leq \pi/2$)

SAMBANDET $v(x)$ GES ALLTSÅ AV

$$v(x) = \arctan\left(\frac{d+h}{x}\right) - \arctan\left(\frac{h}{x}\right)$$

SÖK STATIONÄRA PUNKTER:

$$v'(x) = \frac{-\frac{d+h}{x^2}}{1+\left(\frac{d+h}{x}\right)^2} - \frac{-\frac{h}{x^2}}{1+\left(\frac{h}{x}\right)^2} = -\frac{d+h}{x^2+(d+h)^2} + \frac{h}{x^2+h^2}$$

$$v'(x) = 0 \Rightarrow h\cdot(x^2+(d+h)^2) = (d+h)\cdot(x^2+h^2)$$

$$\Rightarrow h\cdot(d+h)^2 = d\cdot x^2 + (d+h)\cdot h^2 \Rightarrow x^2 = \frac{h\cdot(d+h)^2 - h^2(d+h)}{d}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{h(d+h)\cdot(d+h-h)}{d}} = \sqrt{h\cdot(d+h)}$$

BESTÄM OM $x=\sqrt{h\cdot(d+h)}$ ÄR MIN/MAX/SADEL-PUNKT:

EFTERSOM (i) VISAR ATT $\tan(u+v) \to \infty$ DÅ $x \to 0^+$, D.V.S. $u+v \to \frac{\pi}{2}$ ($\tan$ ÄR KONT.) PÅ SAMMA SÄTT VISAR (ii) ATT $u \to \frac{\pi}{2}$ DÅ $x \to 0^+$. DET FÖLJER ATT $v \to 0$ DÅ $x \to 0^+$.

OM $x \to \infty$ SÅ VISAR (i) ATT $\tan(u+v) \to 0$, D.V.S. $u+v \to 0$. EFTERSOM $u \geq 0$ OCH $v \geq 0$ SÅ MÅSTE ALLTSÅ $v \to 0$ DÅ $x \to \infty$.

SAMMANFATTNINGSVIS: $v \to 0$ DÅ $x \to 0^+$ EL $x \to \infty$, OCH $v(x) > 0$ DÅ $x > 0$ ALLTSÅ MÅSTE $x = \sqrt{h\cdot(d+h)}$ VARA EN MAXPUNKT!

SVAR: AVSTÅNDET $x = \sqrt{h\cdot(d+h)}$ GER MAXIMAL BETRAKTNINGSVINKEL v.

5B1115
TEN-B10/K
6/11-06

9.

a) VISA ATT

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

ÄR KONVERGENT

b) VISA ATT

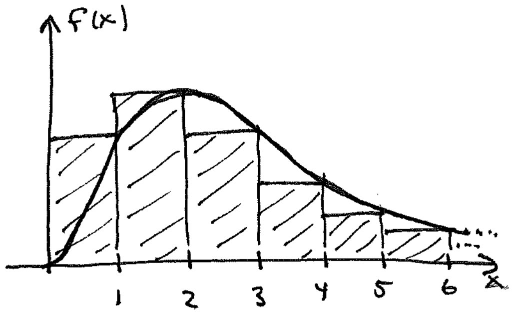
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n} < e^{-1} + 15e^{-2}$$

BETRAKTA FÖRST FUNKTIONEN $f(x) = x^2 e^{-x}$. SKISSERA DESS GRAF:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$$

$$f'(x) = 0 \implies x = 0,\quad x = 2$$

$$f(0) = 0, \quad f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad f(x) > 0 \text{ OM } x > 0$$



TOLKA SERIEN (*) SOM AREAN AV STAPLAR MED BREDD 1 OCH HÖJD $f(1), f(2), \ldots$ (DEN SKUGGADE AREAN I FIG.).

FRÅN FIGUR ÄR KLART ATT VI KAN UPPSKATTA DEN SKUGGADE AREAN MED AREAN AV DE TVÅ FÖRSTA STAPLARNA PLUS AREAN UNDER GRAFEN FRÅN $x = 2$ OCH UPPÅT. D.V.S.

$$\text{(i)}\quad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-n}}_{\text{SKUGGAD AREA}} \le \underbrace{f(1) + f(2)}_{\text{AREA AV TVÅ FÖRSTA STAPLAR}} + \underbrace{\int_2^{\infty} f(t)\,dt}_{\text{AREA UNDER GRAFEN FÖR } x \ge 2}$$

BERÄKNA INTEGRALEN:

$$\text{(ii)}\quad \int_2^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx = \left[-x^2e^{-x}\right]_2^{\infty} + 2\int_2^{\infty} x\cdot e^{-x}\,dx = 4e^{-2} + 2\left(\left[-xe^{-x}\right]_2^{\infty} + \int_2^{\infty} e^{-x}\,dx\right)$$

$$= 4e^{-2} + 2\cdot\left(2e^{-2} + \left[-e^{-x}\right]_2^{\infty}\right) = 8e^{-2} + 2\cdot e^{-2} = 10e^{-2}$$

(i) OCH (ii) GER:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-n} \le f(1) + f(2) + 10e^{-2} = e^{-1} + 4e^{-2} + 10e^{-2} = e^{-1} + 14\cdot e^{-2}$$

DETTA VISAR ATT (*) ÄR KONVERGENT (a), SAMT SER VI ATT (b) ÄR OCKSÅ VISAT, TY:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-n} \le e^{-1} + 14e^{-2} < e^{-1} + 15e^{-2}.$$

SB1115
TEN-B1b/K
6/11-06

8.

TAYLORUTVECKLA KRING $x=-1$ TILL OCH MED GRAD TVÅ, DEN FUNKTION $y(x)$ SOM UPPFYLLER

$$(*) \quad y^2 + (x+3)y = 5x+8, \qquad y(-1)=1.$$

TAYLORUTVECKLINGEN GES AV:

$$y(x) = y(-1) + y'(-1)\cdot(x-(-1)) + \frac{y''(-1)}{2!}\cdot(x-(-1))^2 + x^3\cdot B(x)$$

VI MÅSTE RÄKNA UT $y'(-1)$ OCH $y''(-1)$, VILKET KAN GÖRAS GENOM ATT IMPLICITDERIVERA $(*)$:

(i) $\quad 2y\cdot y' + y + (x+3)y' = 5$

(ii) $\quad 2y'\cdot y' + 2y\cdot y'' + y' + y' + (x+3)y'' = 0$

SÄTT IN $x=-1$, $y(-1)=1$ I (i):

$$2\cdot y'(-1) + 1 + 2y'(-1) = 5 \implies 4y'(-1) = 4 \implies \boxed{y'(-1)=1}$$

SÄTT IN $x=-1$, $y(-1)=1$, $y'(-1)=1$ I (ii):

$$2 + 2y''(-1) + 1 + 1 + 2y''(-1) = 0 \implies 4y''(-1) = -4 \implies \boxed{y''(-1)=-1}$$

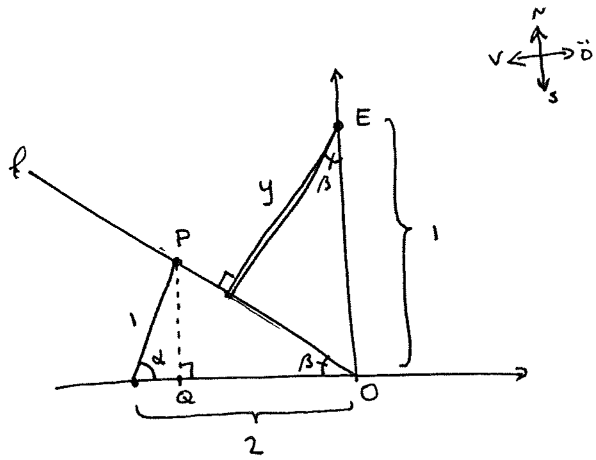
ALLTSÅ FÅR VI:

$$y(x) = 1 + 1\cdot(x+1) + \frac{-1}{2}\cdot(x+1)^2 + x^3\cdot B(x)$$

SVAR: $\quad y(x) = 1 + (x+1) - \dfrac{(x+1)^2}{2} + x^3\cdot B(x)$

SF1644
TEN - I
3/12-07
10.

ALT. 1



VÄLJ KOORDINATSYSTEM SÅ ATT EVA STÅR STILLA I PUNKTEN E. I DETTA KOORDINATSYSTEM SER DET UT SOM ATT KALLE RÖR SIG LÄNGS LINJEN ℓ TY EVA ROR SNABBARE ÄN KALLE.

ANTAG ATT KALLE ROR MED VINKELN α FRÅN ÖST. EFTER 1 TIDSENHET BEFINNER SIG KALLE I PUNKTEN P. (MED DENNA INFORMATION KAN VI BERÄKNA VINKELN β.)

FRÅN FIGUR FÅR VI FÖRHÅLLANDET

$$\frac{y}{|\vec{EO}|} = \frac{|\vec{QO}|}{|\vec{PO}|}$$

DÄR y ÄR DET KORTASTE AVSTÅNDET MELLAN EVA OCH KALLE.

$$|\vec{EO}| = 1$$

$$|\vec{QO}| = 2 - \cos\alpha$$

$$|\vec{PO}| = \sqrt{(2-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{4 - 4\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{5 - 4\cos\alpha}$$

DETTA GER

$$y = \frac{2-\cos\alpha}{\sqrt{5-4\cos\alpha}}$$

SÖK STATIONÄRA PUNKTER

$$y' = \frac{\sin\alpha \cdot (\sqrt{5-4\cos\alpha}) - (2-\cos\alpha)\cdot\frac{1}{2}(5-4\cos\alpha)^{-1/2}\cdot 4\sin\alpha}{5-4\cos\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \sin\alpha \cdot \left(5 - 4\cos\alpha - 2(2-\cos\alpha)\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = 0 \\ 1 - 2\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

MINIMUM UPPNÅS PÅ STATIONÄR PUNKT EL. RANDPUNKT, TESTA VILKEN SOM GER MINIMUM:

$$y(0) = \frac{2-1}{\sqrt{5-4}} = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2-1/2}{\sqrt{5-4\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{3/2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

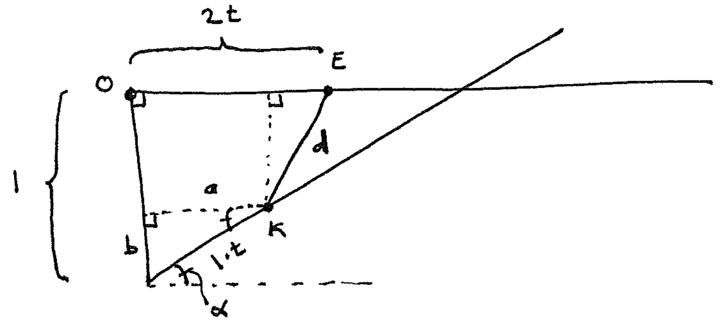
$y(\pi/3)$ ÄR MINST, TY $(\sqrt{3}/2)^2 = 3/4$, $(2\sqrt{5}/5)^2 = 4/5$ OCH $3/4 < 4/5$.

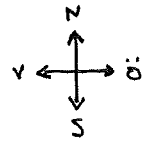
SVAR: KALLE BÖR RO MED VINKELN $\frac{\pi}{3}$ FRÅN ÖST.

SF1644
TEN - I
3/12-07

10.

ALT. 2





VID TIDPUNKT t HAR EVA NÅTT PUNKTEN E PÅ AVSTÅND $2t$ FRÅN O (HON ROR MED FARTEN 2). SAMTIDIGT HAR KALLE NÅTT PUNKTEN K, OM HAN ROR LÄNGS LINJEN MED VINKEL α FRÅN ÖST (KALLE ROR MED FARTEN 1).

DET MINSTA AVSTÅNDET (I KVADRAT) MELLAN E OCH K GES AV:

$$D = d^2 = (1-b)^2 + (2t-a)^2 = (1 - t\cdot\sin\alpha)^2 + (2t - t\cdot\cos\alpha)^2$$
$$= 1 - 2t\sin\alpha + t^2\sin^2\alpha + 4t^2 - 4t^2\cos\alpha + t^2\cdot\cos^2\alpha$$
$$= t^2\cdot(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 4 - 4\cos\alpha) - t\cdot 2\sin\alpha + 1$$
$$= (5 - 4\cos\alpha)\cdot t^2 - 2\sin\alpha\cdot t + 1$$

BETRAKTA D SOM EN FUNKTION AV t (LÅT α VARA FIXERAT) OCH SÖK LOKALA EXTREMPUNKTER!

$$D'(t) = 2(5-4\cos\alpha)t - 2\sin\alpha = 0 \implies t = \frac{\sin\alpha}{5-4\cdot\cos\alpha}$$

VI VET INTE OM DETTA ÄR EN MINPUNKT MEN DE ENDA ANDRA ALTERNATIVEN ÄR $t \to \infty$ (ORIMLIGT, TY $D \to \infty$) OCH $t=0$. OM $t=0$ SÅ ÄR $d=1$ MINSTA AVSTÅNDET. ANTAG ATT DEN STATIONÄRA PUNKTEN ÄR EN MINPUNKT. DÅ

$$D = (5-4\cos\alpha)\cdot\frac{\sin^2\alpha}{(5-4\cos\alpha)^2} - 2\sin\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{5-4\cos\alpha} + 1 = 1 - \frac{\sin^2\alpha}{5-4\cdot\cos\alpha}$$

BETRAKTA NU D SOM EN FUNKTION AV α OCH SÖK EXTREMPUNKTER:

$$D'(\alpha) = -\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(5-4\cos\alpha) - \sin^2\alpha\cdot(4\cdot\sin\alpha)}{(5-4\cos\alpha)^2} = 0$$

$$\implies 2\sin\alpha\cdot(5\cos\alpha - 4\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) = 0$$

$$\implies \sin\alpha = 0 \quad \text{EL.} \quad 5\cos\alpha - 4\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = 0$$

$\sin\alpha = 0 \implies \alpha = 0$ (VI ANTAR $0 \le \alpha \le \pi/2$)

$$5\cos\alpha - 4\cos^2\alpha - 2(1-\cos^2\alpha) = -2\cos^2\alpha + 5\cos\alpha - 2 = 0$$

$$x = \cos\alpha \rightsquigarrow x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \implies \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{16}{16} = 0$$

$$\implies x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4} \qquad x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 2$$

$\implies \alpha = \frac{\pi}{3}$ ($\cos\alpha = 2$ SAKNAR LÖSNING)

FORTS. →

(FORTS.)
10.

ALT. 2

VI HAR ALLTSÅ ATT $D(\alpha)$ HAR TVÅ STATIONÄRA PUNKTER: $\alpha_1 = 0$ OCH $\alpha_2 = \pi/3$. VI TESTAR VILKEN VILKEN SOM GER MINST AVSTÅND (ENDA MÖJLIGHETER FÖR MINIMUM ÄR STATIONÄRA PUNKTER OCH RANDPUNKTER):

$$D(0) = 1 - \frac{\sin^2 0}{5 - 4\cos 0} = 1 \qquad \text{(RANDPUNKT + STATIONÄR)}$$

$$D(\pi/2) = 1 - \frac{\sin^2(\pi/2)}{5 - 4\cos(\pi/2)} = 1 - \frac{1}{5 - 4 \cdot 0} = \frac{4}{5} \qquad \text{(RANDPUNKT)}$$

$$D(\pi/3) = 1 - \frac{\sin^2(\pi/3)}{5 - 4\cos(\pi/3)} = 1 - \frac{(\sqrt{3}/2)^2}{5 - 4 \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= 1 - \frac{3/4}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad \text{(STATIONÄR PUNKT)}$$

VI SER ATT DET MINSTA AVSTÅNDET INTRÄFFAR FÖR VINKELN $\frac{\pi}{3}$ $\left(\frac{3}{4} = \frac{15}{20} < \frac{16}{20} = \frac{4}{5} < 1\right)$. HÄR SER VI OCKSÅ ATT VI KAN FÖRKASTA MÖJLIGHEN $t=0$ TY DEN GAV $D = 1$ (VILKET ÄR $> \frac{3}{4}$).

SVAR: KALLE BÖR RO MED VINKELN $\frac{\pi}{3}$ FRÅN ÖST.