LÖSNINGAR – LAPPSKRIVNING 1, SF1644 FÖR CINEK1, 2008/10/30

1. LÅT $\varepsilon > 0$ VARA GIVET. VI MÅSTE VISA ATT DET EXISTERAR ETT TAL $\delta > 0$ SÅ ATT:

$$|x| < \delta \implies |x^2| < \varepsilon .$$

TAG T.EX. $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. DÅ SER VI ATT OM $|x| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$ SÅ

$$|x^2| = |x|^2 < |\sqrt{\varepsilon}|^2 = \varepsilon$$

D.V.S. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$. $\square$

2. BESTÄM KONSTANTERNA a OCH b SÅ ATT

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{x^2+x-2}, & 0<x<1 \text{ OCH } 1<x<2 \quad (*) \\ b, & x=1 \end{cases}$$

ÄR KONTINUERLIG PÅ $(0,1)$.

VI MÅSTE VÄLJA KONSTANTERNA SÅ ATT

(i) $\lim_{x\to 1} f(x)$ EXISTERAR, OCH

(ii) $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

OM (i) SKA KUNNA HÅLLA SÅ MÅSTE TÄLJAREN I (*) $\to 0$ EFTERSOM NÄMNAREN $\to 0$ $(1^2+1-2=0)$, D.V.S

$$\lim_{x\to 1} x+a = 0 \Rightarrow 1+a=0 \Rightarrow a=-1$$

OM $a=-1$ SÅ

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} \overset{(**)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$$

SÅ OM (ii) SKA KUNNA HÅLLA SÅ MÅSTE $b = \frac{1}{3}$

SVAR: $a=-1$, $b=\frac{1}{3}$

(**) $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$ KAN BERÄKNAS M.H.A. POLYNOMDIVISION. VI VET ATT 1 ÄR EN ROT TILL V-L. SÅ VI BERÄKNAR DEN ANDRA FAKTORN FRÅN

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ \hline x-1 & x^2+x-2 \\ & -(x^2-x) \\ \hline & 2x-2 \\ & -(2x-2) \\ \hline & 0 \end{array}$$

---

3. BERÄKNA GRÄNSVÄRDET $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+6x+1} - \sqrt{x^2+2}$.

DET HÄR ÄR ETT GRÄNSVÄRDE AV TYPEN "$\infty - \infty$" SOM KAN BESTÄMMAS GENOM FÖRLÄNGNING MED KONJUGATET:

$$\sqrt{x^2+6x+1} - \sqrt{x^2+2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+6x+1} - \sqrt{x^2+2}\right)\left(\sqrt{x^2+6x+1} + \sqrt{x^2+2}\right)}{\sqrt{x^2+6x+1} + \sqrt{x^2+2}}$$

$$= \frac{x^2+6x+1-(x^2+2)}{\sqrt{x^2+6x+1} + \sqrt{x^2+2}}$$

$$= \frac{6x-1}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}} + |x|\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}$$

$$\overset{x>0!}{=} \frac{x}{x}\cdot\frac{6-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}$$

$$\xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{6-0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{6}{2} = 3$$

SVAR: 3

4. f BEHÖVER <u>INTE</u> ANTA ALLA VÄRDEN MELLAN $f(a)$ OCH $f(b)$.

T.EX. LÅT

$$f(x) = \begin{cases} -1, & a < x < b \\ 0, & x = a \\ 1, & x = b \end{cases}$$

DÅ ÄR f KONTINUERLIG PÅ (a,b) MEN f ANTAR <u>INGA</u> VÄRDEN MELLAN $f(a)=0$ OCH $f(b)=1$!

OBS! VI KAN INTE TILLÄMPA SATSEN OM MELLANLIGGANDE VÄRDEN TY f ÄR ED KONTINUERLIG PÅ HELA DEFINITIONSMÄNGDEN $[a,b]$.