$\boxed{1.}$

SATS: (i) $x_0$ INRE PUNKT (TILL $f$)
(ii) $x_0$ LOKAL MAXPUNKT (–"–)
(iii) $f$ DERIVERBAR I $x_0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i)}\\ \text{(ii)}\\ \text{(iii)}\end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

BEVIS: (i) $\Rightarrow$ $f$ DEFINIERAD PÅ ÖPPET INTERVALL RUNT $x_0$

(ii) $\Rightarrow$ $f(x_0+h) \leq f(x_0)$ DÅ $|h| < \delta$ FÖR NÅGOT $\delta > 0$ SÅDANT ATT $f$ DEFINIERAD PÅ $(x_0-\delta, x+\delta)$
(OBS! VIKTIGT ATT (i) GÄLLER HÄR!)

(iii) $\Rightarrow$

$$\lim_{h\to 0^-} g(x_0,h) = \lim_{h\to 0} g(x_0,h) = \lim_{h\to 0^+} g(x_0,h)$$

DÄR $g(x_0,h) := \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, (D.V.S. EFTERSOM GRÄNSVÄRDET EXISTERAR DÅ $h \to 0$ SÅ MÅSTE DET VARA LIKA MED HÖGER- OCH VÄNSTERGRÄNSVÄRDET.)

MEN TÄLJAREN I $g(x_0,h)$ ÄR ALLTID $\leq 0$ FÖR $|h| < \delta$ SÅ TECKNET AV $g(x_0,h)$ BESTÄMS AV NÄMNARENS TECKEN. D.V.S

$$g(x_0,h) \geq 0 \quad \text{OM} \quad h < 0$$
$$g(x_0,h) \leq 0 \quad \text{OM} \quad h > 0$$

SÅLEDES GÄLLER

$$\lim_{h\to 0^-} g(x_0,h) \geq 0$$
$$\lim_{h\to 0^+} g(x_0,h) \leq 0$$

SÅ

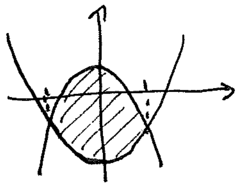
$$0 \leq \lim_{h\to 0^-} g(x_0,h) = f'(x_0) = \lim_{h\to 0^+} g(x_0,h) \leq 0$$

D.V.S. $0 \leq f'(x_0) \leq 0$ SÅ $f'(x_0) = 0$. $\square$

2\. BESTÄM AREAN AV OMRÅDET I XY-PLANET SOM UPPFYLLER

$$x^2-2 < y < 1-x^2$$

1\. SKISSERA OMRÅDET



2\. BESTÄM SKÄRNINGSPUNKTERNA

$$x^2-2 = 1-x^2 \implies 2x^2 = 3 \implies x = \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

3\. BERÄKNA AREAN. OBS: OMRÅDET ÄR SYMMETRISKT SÅ VI BERÄKNAR AREAN AV OMRÅDET DÄR $x \geq 0$ OCH DUBBLAR RESULTATET:

$$A = 2\int_0^{\sqrt{3/2}} \left(1-x^2-(x^2-2)\right)dx = 2\int_0^{\sqrt{3/2}} (3-2x^2)\,dx$$

$$= 6\int_0^{\sqrt{3/2}} dx - 4\int_0^{\sqrt{3/2}} x^2\,dx = 6\cdot\sqrt{\tfrac{3}{2}} - 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3/2}}$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = \sqrt{2}\cdot 3\cdot\sqrt{3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$= 3\sqrt{6} - \frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{6} - \sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{6} - \sqrt{6}$$

$$= 2\sqrt{6}$$

SVAR: $2\sqrt{6}$

$\boxed{3.}$ VISA ATT SERIEN

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

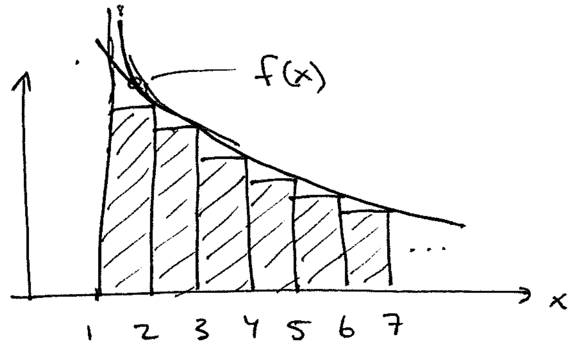
ÄR KONVERGENT.

LÅT $f(x) = \frac{1}{x\cdot(\ln x)^2}$, $x \geq 2$. DÅ ÄR $f(x) > 0$ OCH

$$f'(x) = -\frac{(\ln x)^2 + x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{x^2\cdot(\ln x)^4}$$

$$= -\frac{\ln x\cdot(\ln x + 2)}{x^2\cdot(\ln x)^4} < 0$$

SÅ $f$ ÄR POSITIV OCH AVTAGANDE.




OBS! $f(x) \to \infty$, DÅ $x \to 1^+$

FRÅN FIGUR KAN VI GÖRA FÖLJANDE UPPSKATTNING!

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} f(n)}_{\text{AREAN AV STAPLARNA}} \leq \underbrace{f(2)}_{\text{FÖRSTA STAPELNS AREA}} + \underbrace{\int_2^{\infty} f(x)\,dx}_{\text{AREAN UNDER GRAFEN FÖR } x \geq 2}$$

$$= \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \left[-\frac{1}{t}\right]_{\ln 2}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2} < \infty$$

D.V.S. SERIEN ÄR KONVERGENT.

4. SKATT I PROCENTSATS : $r \in [0,1]$

ANDEL REDOVISAD INKOMST : $(1-r)^2$

MAXIMERA SKATTEINTÄKTEN!

OM TOTAL INKOMST ÄR $T$ SÅ ÄR SKATTEINTÄKTEN

$$r \cdot (1-r)^2 \cdot T$$

VI SKA ALLTSÅ MAXIMERA

$$f(r) = r \cdot (1-r)^2 \qquad \text{DÅ} \qquad r \in [0,1].$$

SÖK STATIONÄRA PUNKTER:

$$f'(r) = (1-r)^2 + r 2 \cdot (1-r) \cdot (-1) = (1-r) \cdot (1-r-2r)$$

$$= (1-r)(1-3r)$$

$$f'(r) = 0 \implies \begin{cases} r = 1 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases}$$

UPPFÖR TECKENTABELL:

| $r$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(r)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |

$\implies r = \frac{1}{3}$ LOKAL MAXPUNKT

VI SER FRÅN TECKENTABELL (SAMT FRÅN ATT $f$ DERIVERBAR) ATT $r = \frac{1}{3}$ OCKSÅ ÄR GLOBAL MAXPUNKT.

SVAR: $r = \frac{1}{3}$