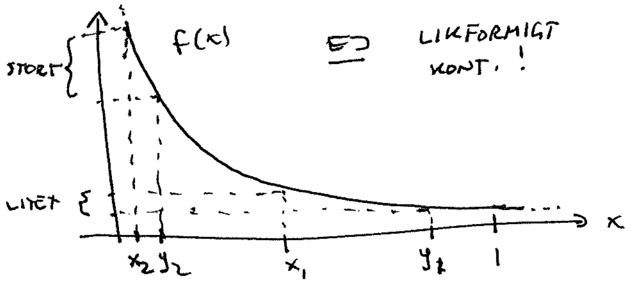
DEF: f ÄR <u>LIKFORMIGT KONTINUERLIG</u> OMM

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in D_f .$$

OBS!
- SAMMA δ FUNGERAR FÖR ALLA x, y
- KONTINUITET ÄR DEFINIERAD FÖR ENSKILDA PUNKTER TILL SKILLNAD FRÅN LIKFORMIG KONTINUITET SOM ÄR EN GLOBAL EGENSKAP

EX: LÅT $f(x) = \frac{1}{x}$, $0 < x < 1$. DÅ ÄR f KONTINUERLIG, MEN INTE LIKFORMIGT KONTINUERLIG.

FÖR x, y NÄRA 1 RÄCKER $|x-y| \lesssim \varepsilon$ FÖR ATT $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, MEN FÖR x, y NÄRA 0 MÅSTE x OCH y VARA VÄLDIGT NÄRA VARANDRA FÖR ATT $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. PROBLEMET HÄR ÄR ATT f VÄXER OBEGRÄNSAT NÄRA 0.



$|x_1 - y_1|$ KAN VARA STORT MEN $|f(x_1) - f(y_1)|$ LITET.

$|x_2 - y_2|$ VÄLDIGT LITET MEN $|f(x_2) - f(y_2)|$ STORT.

SATS: f LIKFORMIGT KONT. PÅ $[a,b]$ $\implies$ f INTEGRERBAR (PÅ $[a,b]$)

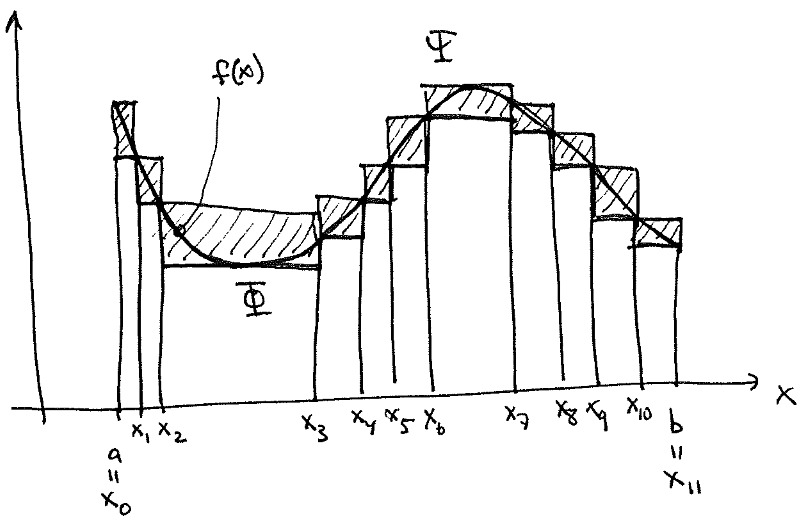
BEVIS: LÅT $\varepsilon > 0$ VARA GIVET. VI MÅSTE VISA ATT DET FINNS TRAPPSTEGSFUNKTIONER Φ OCH Ψ SÅ ATT

$$\Phi \le f \le \Psi \quad \text{OCH} \quad |I(\Phi) - I(\Psi)| < \varepsilon .$$

VI KONSTRUERAR NU DESSA.

LÅT $\delta > 0$ VARA SÅDANT ATT $|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b-a)$ (OK TY f LIKFORMIGT KONT.) OCH DELA UPP $[a,b]$ I n ST. DELINTERVALL AV LÄNGD $< \delta$ ($|x_{k-1} - x_k| < \delta$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$). PÅ VARJE $[x_{k-1}, x_k]$ HAR f ETT MIN SAMT MAX, KALLA DESSA m_k RESP. M_k (SÅ $m_k \le f(x) \le M_k$, $\forall x \in [x_{k-1}, x_k]$). LÅT Φ VARA TRAPPFUNKT. MED KOEFF. m_k PÅ INTERVALL $[x_{k-1}, x_k]$, OCH Ψ DEF. PÅ SAMMA SÄTT FAST MED M_k. DÅ GÄLLER $\Phi \le f \le \Psi$ OCH

$$I(\Psi) - I(\Phi) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)|x_k - x_{k-1}| \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}| = \varepsilon . \quad \square$$



Ψ ÖVRE TRAPPFUNKTION

Φ UNDRE TRAPPFUNKTION

$I(\Psi) - I(\Phi)$ = AREAN AV SKUGGADE REKTANGLAR

LIKFORMIG KONTINUITET GER ATT HÖJDEN PÅ VARJE SKUGGAD REKTANGEL ENDAST BEROR PÅ DEN STÖRSTA BASLÄNGDEN, SAMT ATT OM MAX BASLÄNGD $\to 0$ SÅ GÅR ÄVEN VARJE HÖJD (PÅ SKUGGAD REKTANGEL) MOT NOLL.

D.V.S. SÅ LÄNGE VI VÄLJER EN TILLRÄCKLIGT FIN UPPDELNING AV $[a,b]$ SÅ KAN VI FÅ DEN SKUGGADE AREAN SÅ LITEN VI VILL. MED ANDRA ORD SÅ ÄR f INTEGRERBAR.

SATS (ANALYSENS HUVUDSATS)

$$\left.\begin{aligned} &f \text{ KONT. PÅ } [a,b] \\ &F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \le x \le b \end{aligned}\right\} \implies F'(x) = f(x)$$

BEVIS: BESTÄM $F'(x)$ M.H.A. DERIVATANS DEFINITION

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

LÅT $\varepsilon > 0$ VARA GIVET. DÅ f ÄR KONT. I x SÅ KAN VI HITTA $\delta > 0$ SÅ ATT $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$ OM $|t-x| < \delta$. LÅT $|h| < \delta$. VI VILL VISA ATT FÖLJANDE DIFFERENS ÄR $< \varepsilon$ (DÅ FÖLJER SATSEN):

$$\left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt \right|$$

OBS! KONSTANT HÄR (BEROR EJ PÅ t!)

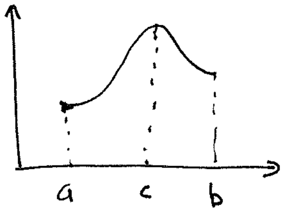
$$\begin{aligned} &= \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(t)-f(x)\big)\,dt \right| \\ &\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt \qquad \text{(TRIANGELOLIKHETEN FÖR INTEGRALER s. 294)} \\ &< \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon\,dt = \varepsilon \end{aligned}$$

ENLIGT GRÄNSVÄRDETS DEFINITION VISAR DETTA ATT

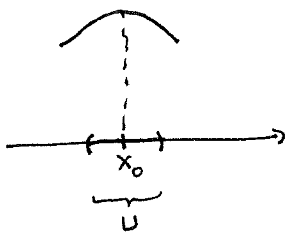
$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \quad \left(= F'(x)\right)$$

SATS 1: f KONT. PÅ $[a,b] \Longrightarrow f$ ANTAR MIN- OCH MAXVÄRDE PÅ $[a,b]$

$\left.\begin{array}{ll} \text{MAXVÄRDE} & f(c) \\ \text{MINVÄRDE} & f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow$



SATS 2 $\left.\begin{array}{l} \text{(i) } f \text{ DERIVERBAR I } x_0 \\ \text{(ii) } x_0 \text{ LOKAL MAXPUNKT} \\ \text{(iii) } x_0 \text{ INRE PUNKT I } f\text{'s DEFINITIONSOMRÅDE} \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_0) = 0$



(iii) $\Longrightarrow \exists$ ÖPPET OMRÅDE U KRING x_0 DÄR f ÄR DEFINIERAD

(ii) $\Longrightarrow f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in U$

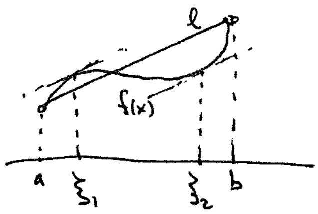
$$(*) \quad \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \geq 0 & \text{OM } h < 0 \\ \leq 0 & \text{OM } h > 0 \end{cases}$$

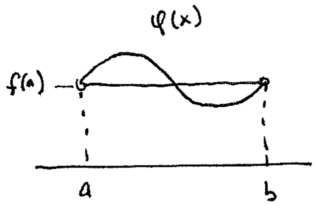
(i) $\Longrightarrow$ (*) HAR GRÄNSVÄRDE DÅ $h \to 0$ OCH

$$0 \leq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

SATS (MEDELVÄRDESSATSEN)

$\left.\begin{array}{l} f \text{ KONT. PÅ } [a,b] \\ f \text{ DERIVERBAR PÅ } (a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, \xi \in (a,b) : \quad f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$





SÖK PUNKTER DÄR f' HAR SAMMA LUTNING SOM l, D.V.S. PUNKTER DÄR $\varphi'(x) = 0$.

$\varphi(x)$ SKILLNADEN MELLAN $f(x)$ OCH RÄTA LINJEN FRÅN $(a, f(a))$ TILL $(b, f(b))$:

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot (x-a) \qquad \text{OBS: } \varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$$

SÖK $\xi \in (a,b)$ SÅ ATT $\varphi'(\xi) = 0$!

OM $\varphi(x) = f(a)$ $\forall x$ SÅ ÄR $\varphi'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$, KLAR.

ANNARS FINNS ÅTMINSTONE EN PUNKT x S.A. $\varphi(x) \neq f(a)$. SATS 1 $\Rightarrow \varphi$ HAR LOKALT EXTREMPUNKT ξ ~~OCH DENNA MÅSTE~~ SOM LIGGER I (a,b). SATS 2 $\Rightarrow \varphi'(\xi) = 0$.