LEKTION 2 21/1/09 SF1646

BJÖRN WINCKLER
winckler@kth.se

$\boxed{2.2}$ BERÄKNA PARTIALDERIVATORNA (KAP 2.1):

a) $f(\bar{x}) = \ln|x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1|$

LÅT $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, SÅ $f(\bar{x}) = \ln|g(\bar{x})|$. DÅ:

$$f_1'(\bar{x}) = \frac{g_1'(\bar{x})}{g(\bar{x})}$$

(KEDJEREGELN (KAP. 2.3) + $\frac{d}{dt}(\ln|t|) = \frac{1}{t}$)

$$= \frac{x_2 + x_3}{g(\bar{x})} = \underline{\underline{\frac{x_2+x_3}{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}}}$$

$$f_2'(\bar{x}) = \frac{g_2'(\bar{x})}{g(\bar{x})}$$

$$= \frac{x_1 + x_3}{g(\bar{x})} = \underline{\underline{\frac{x_1+x_3}{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}}}$$

$$f_3'(\bar{x}) = \frac{g_3'(\bar{x})}{g(\bar{x})}$$

$$= \frac{x_2 + x_1}{g(\bar{x})} = \underline{\underline{\frac{x_2+x_1}{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}}}$$

---

b) $f(\bar{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

VI ANVÄNDER ÅTERIGEN KEDJEREGELN, $f(\bar{x}) = \sqrt{g(\bar{x})}$, $g(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$:

$$f_1'(\bar{x}) = \frac{1}{2} g(\bar{x})^{-1/2} \cdot g_1'(\bar{x}) = \frac{1}{2} g(\bar{x})^{-1/2} \cdot 2x_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} = \underline{\underline{\frac{x_1}{|\bar{x}|}}}$$

$$f_2'(\bar{x}) = \frac{1}{2} g(\bar{x})^{-1/2} \cdot g_2'(\bar{x}) = \frac{1}{2} g(\bar{x})^{-1/2} \cdot 2x_2 = \underline{\underline{\frac{x_2}{|\bar{x}|}}}$$

$$f_3'(\bar{x}) = \frac{1}{2} g(\bar{x})^{-1/2} \cdot g_3'(\bar{x}) = \frac{1}{2} g(\bar{x})^{-1/2} \cdot 2x_3 = \underline{\underline{\frac{x_3}{|\bar{x}|}}}$$

$\boxed{2.8}$ VISA M.H.A. DEFINITION ATT $f(x,y) = \sin(x+y)$ ÄR

d) DIFFERENTIERBAR I PUNKTEN $(1,1)$.

ENLIGT DEFINITION SÅ ÄR f DIFFERENTIERBAR I $\bar{a}$ OMM

$$(*) \quad f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) = A_1 \cdot h_1 + \dots + A_n h_n + |\bar{h}| \cdot \rho(\bar{h})$$

DÄR A_j ÄR KONSTANTER OCH $\rho(\bar{h}) \to 0$ DÅ $\bar{h} \to 0$ (S.53).

I VÅRT FALL ÄR $\bar{a} = (1,1)$, $\bar{h} = (h_1, h_2)$ OCH

$$\begin{aligned} f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) &= f(1+h_1, 1+h_2) - f(1,1) \\ (i) \qquad &= \sin((1+h_1)+(1+h_2)) - \sin(1+1) \\ &= \sin(2+(h_1+h_2)) - \sin 2 \end{aligned}$$

TAYLORUTVECKLING AV sin RUNT 2 GER

$$(ii) \quad \sin(2+(h_1+h_2)) = \sin 2 + (h_1+h_2) \cdot \cos 2 + (h_1+h_2)^2 \cdot B(\xi)$$

DÄR B ÄR EN BEGRÄNSAD FUNKTION OCH $\xi \in (2-|h_1+h_2|, 2+|h_1+h_2|)$.

(i) OCH (ii) GER

$$\begin{aligned} f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) &= (h_1+h_2) \cdot \cos 2 + (h_1+h_2)^2 \cdot B(\xi) \\ &\leq (h_1+h_2) \cdot \cos 2 + (|\bar{h}|+|\bar{h}|)^2 \cdot B(\xi) \\ &= \cos 2 \cdot h_1 + \cos 2 \cdot h_2 + |\bar{h}| \cdot (4|\bar{h}| \cdot B(\xi)) \end{aligned}$$

EFTERSOM B ÄR BEGRÄNSAD SÅ $4|\bar{h}| \cdot B(\xi) \to 0$ DÅ $|\bar{h}| \to 0$.

ALLTSÅ ÄR f DIFFERENTIERBAR I $(1,1)$. (JÄMFÖR $(*)$ MED $A_1 = \cos 2 = A_2$, $\rho(\bar{h}) = 4 \cdot |\bar{h}| \cdot B(\xi)$.)

$\boxed{2.10}$ GIVET ATT $g = 2st^{-2}$, $s_0 = 2 \pm 0.01$, $t_0 = 0.63 \pm 0.01$;

VILKET VÅRDE ERHÅLLS FÖR g? VILKEN NOGGRANNHET?

g ÄR EN FUNKTION AV s OCH t:

$$g(s,t) = 2 \cdot s \cdot t^{-2}$$

ENLIGT FELFORTPLANTNINGSFORMELN (S.59) GES NOGGRANNHETEN AV:

$$|\Delta g| \lesssim |g'_s| \cdot |\Delta s| + |g'_t| \cdot |\Delta t|$$

DÅ $t = t_0 + \Delta t$, $s = s_0 + \Delta s$. ALLTSÅ

$$|\Delta g| \lesssim |2 \cdot t_0^{-2}| \cdot |\Delta s| + |-4 \cdot s_0 \cdot t_0^{-3}| \cdot |\Delta t|$$

$$= |2 \cdot 0.63^{-2}| \cdot |0.01| + |4 \cdot 2 \cdot 0.63^{-3}| \cdot |0.01|$$

$$\approx 0.4$$

$$g_0 = g(s_0, t_0) = 2 \cdot 2 \cdot 0.63^{-2} \approx 10.1$$

SVAR: $g \approx 10.1 \pm 0.4$

$\boxed{2.10}$ $\quad g = 2st^{-2}$

(ALT. LÖSN.)

OM $\quad s = s_0 + \Delta s\,,\quad t = t_0 + \Delta t \quad$ FÅR VI ATT

$$g = 2(s_0 + \Delta s)\cdot(t_0 + \Delta t)^{-2} = \frac{2(s_0 + \Delta s)}{t_0^2\left(1 + \frac{\Delta t}{t_0}\right)^2}$$

LÅT $\quad f(h) = (1+h)^{-2} \quad$ OCH TAYLORUTVECKLA

$$f(0) = 1\,, \quad f'(h) = -2(1+h)^{-3}\,, \quad f'(0) = -2$$

$$f(h) = f(0) + h\cdot f'(0) + p(h^2) \qquad (p(h^2) \text{ POTENSSERIE I } h^2)$$

$$= 1 - 2h + p(h^2)$$

INSÄTTNING GER

$$g = \frac{2(s_0+\Delta s)}{t_0^2}\cdot\left[1 - 2\cdot\frac{\Delta t}{t_0} + p\left(\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)^2\right)\right]$$

$$= \frac{2s_0}{t_0^2} + \Delta s\cdot\frac{2}{t_0^2} - \Delta t\cdot\frac{4s_0}{t_0^3} + \cdots$$

GIVET $\quad s = 2 \pm 0.01\,, \quad t = 0.63 \pm 0.01$

$$g = \frac{2\cdot 2}{0.63^2} \pm \left(0.01\cdot\frac{2}{0.63^2} + 0.01\cdot\frac{4\cdot 2}{0.63^3}\right)$$

$$\approx 10.1 \pm 0.370$$

$\boxed{2.13}$

$$f(x,y) = e^{x^2 y} + xy$$

$$u(t) = f(\cos t, \sin t)$$

a) $$u(t) = \exp\{\cos^2 t \cdot \sin t\} + \cos t \cdot \sin t$$

$$u'(t) = \exp\{\cos^2 t \cdot \sin t\} \cdot [\underbrace{-2 \cdot \cos t \cdot \sin^2 t}_{} + \cos^3 t]$$

$$+ \underbrace{-\sin^2 t + \cos^2 t}_{= \cos 2t}$$

$$= -2\cos t\left[\sin^2 t - \frac{\cos^2 t}{2}\right]$$

$$= -2\cos t\left[1 - \cos^2 t - \tfrac{1}{2}\cos^2 t\right]$$

$$= -2\cos t + 3\cos^3 t$$

$$= \exp\{\cos^2 t \cdot \sin t\} \cdot [3\cos^3 t - 2\cos t] + \cos 2t$$

b) $$u'(t) = f'_x(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t) + f'_y(\cos t, \sin t) \cdot \cos t$$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = e^{x^2 y} \cdot 2xy + y \\ f'_y(x,y) = e^{x^2 y} \cdot x^2 + x \end{cases}$$

$$u'(t) = -\sin t \cdot [\exp\{\cos^2 t \sin t\} \cdot 2\cos t \cdot \sin t + \sin t]$$

$$+ \cos t \cdot [\exp\{\cos^2 t \cdot \sin t\} \cdot \cos^2 t + \cos t]$$

$$= \exp\{\cos^2 t \cdot \sin t\} \cdot [\underbrace{-2 \cdot \cos t \cdot \sin^2 t}_{-2\cos t + 2\cos^3 t} + \cos^3 t] - \sin^2 t + \cos^2 t$$

$$= \exp\{\cos^2 t \cdot \sin t\} \cdot [3 \cdot \cos^3 t - 2\cos t] + \cos 2t$$

$\boxed{2.17}$ $$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot g(xy^{-1}) = (xy)^{-1/2} \cdot g(xy^{-1})$$

PARTIALDERIVERA

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{(xy)^{-1/2}\right\} \cdot g(xy^{-1}) + (xy)^{-1/2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left\{g(xy^{-1})\right\}$$

↑ (PRODUKTREGELN)

$$= -\frac{1}{2}(xy)^{-3/2} \cdot y \cdot g(xy^{-1}) + (xy)^{-1/2} \cdot g'(xy^{-1}) \cdot y^{-1}$$

↑ (KEDJEREGELN)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{(xy)^{-1/2}\right\} \cdot g(xy^{-1}) + (xy)^{-1/2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left\{g(xy^{-1})\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}(xy)^{-3/2} \cdot x \cdot g(xy^{-1}) + (xy)^{-1/2} \cdot g'(xy^{-1}) \cdot (-xy^{-2})$$

VILKET GER

$$x \cdot f'_x + y \cdot f'_y + f = -\frac{1}{2} \cdot \frac{xy}{(xy)^{3/2}} \cdot g(xy^{-1}) + \cancel{(xy)^{-1/2} \cdot g'(xy^{-1}) \cdot xy^{-1}}$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{xy}{(xy)^{3/2}} \cdot g(xy^{-1}) - \cancel{(xy)^{-1/2} \cdot g'(xy^{-1}) \cdot xy^{-1}}$$

$$+ (xy)^{-1/2} \cdot g(xy^{-1})$$

$$= -\frac{g(xy^{-1})}{(xy)^{1/2}} + \frac{g(xy^{-1})}{(xy)^{1/2}} = 0$$

$\boxed{2.21}$ $f(x,y)$ ÄR EN FUNKTION I VARIABLERNA x OCH y.

INFÖR NYA VARIABLER

$$\begin{cases} u = x - ky, \\ v = x + ky, \end{cases} \qquad k \neq 0$$

DETTA STEG ÄR ONÖDIGT

~~LÖS UT x OCH y~~

$$\cancel{u + v = 2x \implies x = \tfrac{1}{2}(u+v)}$$

$$\cancel{v - u = 2ky \implies y = \tfrac{1}{2k}(v-u)}$$

~~NU KAN VI BETRAKTA x OCH y SOM FUNKTIONER AV u OCH v, DVS~~

$$\cancel{x = x(u,v), \quad y = y(u,v)}$$

PARTIALDERIVERA $f(x,y)$ M.A.P. x OCH y,
ANVÄND KEDJEREGELN:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(-k) + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot k$$

---

b)
$$2\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot(2-k) + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot(2+k)$$

OM VI VÄLJER $k = 2$ SÅ ÄR OVANSTÅNDE EKV. NOLL OMM f ÄR OBEROENDE AV v (TY DÅ $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$). DVS

$$f(u,v) = g(u) = g(x-2y)$$

DÄR g ÄR NÅGON DIFFERENTIERBAR FUNKTION.

VILLKORET $f(x,0) = \sin x$ GER

$$g(x) = \sin x$$

SÅLEDES MÅSTE

$$f(x,y) = g(x-2y) = \sin(x-2y).$$

$\boxed{2.30}$ ENLIGT SATS 6 (s. 78) SÅ GES RIKTNINGSDERIVATAN AV

$$f'_{\hat{v}}(\bar{a}) = \text{grad}\, f(\bar{a}) \cdot \hat{v}$$

DÅ $|\hat{v}| = 1$.

GIVET

$$f(x,y,z) = \frac{xy^2z^3}{2+x}, \qquad a = (2,2,1), \qquad v = (-4,2,-4)$$

RIKTNINGEN ÄR EJ NORMERAD; LÅT $\hat{v} = v/|v|$, DÅ GÄLLER $|\hat{v}| = 1$ (DVS $\hat{v}$ HAR SAMMA RIKTNING SOM v, FAST $\hat{v}$ ÄR NORMERAD.)

$$\hat{v} = \frac{(-4,2,-4)}{\sqrt{16+4+16}} = \frac{(-4,2,-4)}{6} = \frac{1}{3}\cdot(-2,1,-2)$$

BERÄKNA GRADIENTEN I a:

$$\text{grad}\, f = (f'_x, f'_y, f'_z)$$

$$f'_x = \frac{y^2z^3\cdot(2+x) - xy^2z^3}{(2+x)^2} = \frac{2y^2z^3}{(2+x)^2}$$

$$f'_y = \frac{2xyz^3}{2+x}$$

$$f'_z = \frac{3xy^2z^2}{2+x}$$

$$\text{grad}\, f(a) = \left(\frac{2\cdot4\cdot1}{4^2}, \frac{2\cdot2\cdot2\cdot1}{4}, \frac{3\cdot2\cdot4\cdot1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2, 6\right)$$

DETTA GER RIKTNINGSDERIVATAN

$$f'_{\hat{v}}(a) = \left(\frac{1}{2}, 2, 6\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{11}{3}$$

$\boxed{2.35}$ $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $a = (2,3,6)$

BERÄKNA GRADIENTEN I a:

$$f'_x = 2x \ , \quad f'_y = 2y \ , \quad f'_z = 2z$$

$$\text{grad}\ f(a) = 2\cdot(2,3,6)$$

LÅT $\hat{v}$ VARA NGN. VEKTOR S.A. $|\hat{v}| = 1$; DÅ GÄLLER

$$f'_{\hat{v}}(a) = \text{grad}\ f(a)\cdot\hat{v} = |\text{grad}\ f(a)|\cdot|\hat{v}|\cdot\cos\theta$$

DÄR θ ÄR VINKELN MELLAN grad $f(a)$ OCH $\hat{v}$.

DÅ $\cos\theta$ ANTAR ALLA VÄRDEN MELLAN -1 OCH 1 DÅ θ VARIERAS MELLAN $-\pi$ OCH 0 SÅ FÅR VI ATT

$$-|\text{grad}\ f(a)| \le f'_{\hat{v}}(a) \le |\text{grad}\ f(a)|$$

DÅ

$$|\text{grad}\ f(a)| = \sqrt{16+36+144} = 2\cdot\sqrt{4+9+36} = 2\sqrt{49} = 14$$

SER VI ATT RIKTNINGSDERIVATAN ANTAR ALLA VÄRDEN MELLAN -14 OCH 14 (INKLUSIVE) DÅ $\hat{v}$ VARIERAS.

$$-14 \le f'_{\hat{v}}(a) \le 14$$

SAMMANFATTNING – LEKTION 2

<u>BEGREPP</u>:

- PARTIELL DERIVATA (s.45)
- DIFFERENTIERBARHET (s.52)
- KLASSEN C^1 (KONTINUERLIGT DERIVERBARA FUNKTIONER) (s.56)
- FELUPPSKATTNING (s.58)
- KEDJEREGELN (s.60)
- GRADIENT OCH RIKTNINGSDERIVATA (s.74)

<u>SATSER</u>:

- $f \in C^1 \implies f$ DIFFERENTIERBAR (SATS 3, s.56)
  (DEN OMVÄNDA UTSAGAN ÄR <u>EJ</u> SANN!)
- SATS 6 (s.78) ANVÄNDS OFTA FÖR ATT BERÄKNA RIKTNINGSDERIVATOR
- SATSERNA 7 (s.79) OCH 8 (s.82) GER GRADIENTEN EN GEOMETRISK BETYDELSE (VIKTIGT FÖR INTUITIONEN).

<u>NOTERA</u>:

- DIFFERENTIERBARHET DEFINIERAS ALLTID PÅ EN ÖPPEN MÄNGD. SÅLEDES OM EN FUNKTION ÄR DIFFERENTIERBAR SÅ ~~ÄR~~ MÅSTE DESS DEFINITIONSMÄNGD VARA ÖPPEN.