LEKTION 3 30/1/08 SF1646

BJÖRN WINCKLER
winckler@kth.se

$\boxed{2.51}$ $f(x,y) = g(x^2-y)$

SÖK LÖSNINGAR TILL

(i) $2f'_y + f''_{xx} + x f''_{xy} = 0$, $x > 0$

PARTIAL DERIVERA

$$f'_y = g'(x^2-y)\cdot(-1)$$

$$f'_x = g'(x^2-y)\cdot 2x, \qquad f''_{xx} = g''(x^2-y)\cdot 4x^2 + 2g'(x^2-y)$$

$$f'_{xy} = g''(x^2-y)\cdot 2x\cdot(-1)$$

DETTA GER

$$2f'_y + f''_{xx} + x f''_{xy} = -2g'(x^2-y) + 4x^2\cdot g''(x^2-y) + 2g'(x^2-y) - 2x^2 g''(x^2-y)$$
$$= 2x^2\cdot g''(x^2-y)$$

FÖR ATT (i) SKA KUNNA GÄLLA SÅ MÅSTE $g''(t) = 0$, DVS

$$g(t) = a\cdot t + b$$

DÄR a,b ÄR KONSTANTER. SÅLEDES MÅSTE $f(x,y)$ UPPFYLLA

$$f(x,y) = g(x^2-y) = a(x^2-y) + b$$

$\boxed{2.53}$ $T(r,t)$ UPPFYLLER

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}$$

SÖK FUNKTIONER f S.A. $T(r,t) = f(r/\sqrt{t})$ UPPFYLLER OVANST.

PARTIALDERIVERA

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\cdot\left(-\frac{r}{2}\cdot t^{-3/2}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = f'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = f''\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\cdot\frac{1}{t}$$

INSÄTTNING I (ii) GER

$$-f'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\cdot\frac{r}{2t^{3/2}} = f''\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\cdot\frac{1}{t} - \frac{1}{r}\cdot f'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$f''\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) = f'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\cdot\left[-\frac{r}{2t^{1/2}} + \frac{\sqrt{t}}{r}\right]$$

LÅT $u = r/\sqrt{t}$, DÅ FÅR VI

$$f''(u) = f'(u)\cdot\left[\frac{1}{u} - \frac{u}{2}\right]$$

DETTA ÄR EN ORDINÄR DIFFERENTIALEKVATION I EN VARIABEL SOM VI KAN LÖSA PÅ FÖLJANDE SÄTT

$$\frac{1}{u} - \frac{u}{2} = \frac{f''(u)}{f'(u)} = \left[\log f'(u)\right]'$$

$$\Rightarrow \log f'(u) = \log u - \frac{u^2}{4} + K_1$$

$$\Rightarrow f'(u) = \exp\left\{\log u - \frac{u^2}{4} + K_1\right\} = u\cdot e^{-\left(\frac{u}{2}\right)^2}\cdot e^{K_1} = K_2\cdot\left[e^{-\left(\frac{u}{2}\right)^2}\right]'$$

$$\Rightarrow f(u) = a\cdot e^{-\left(\frac{u}{2}\right)^2} + b$$

DÄR a OCH b ÄR KONSTANTER.

SÅLEDES FÅR VI ATT FUNKTIONER AV TYPEN

$$f(u) = a\cdot e^{-\left(\frac{u}{2}\right)^2} + b, \quad a, b \text{ KONST.}$$

LÖSER EKV. (ii) MED $T(r,t) = f(r/\sqrt{t})$.

$\boxed{2.55}$ ATT TRANSFORMERA f''_{xy} TILL NYA VARIABLER $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, INNEBÄR ATT VI VILL UTTRYCKA f''_{xy} I $\overset{u,v,}{\vee}$ $f'_u, f'_v, f''_{uu}, f''_{vv}, f''_{uv}$. FÖR ATT GÖRA DETTA SÅ ANVÄNDER VI KEDJEREGELN.

PARTIALDERIVERA f, ANVÄND KEDJEREGELN; LÅT $\begin{cases} u = x+y \\ v = xy \end{cases}$

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x \underset{\uparrow \text{Ⓚ}}{=} f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot y$$

Ⓚ = KEDJEREGELN

$$f''_{xy} = \underbrace{f''_{uu} \cdot u'_y + f''_{uv} \cdot v'_y}_{K} + \underbrace{\Big[\underbrace{f''_{vu} \cdot u'_y + f''_{vv} \cdot v'_y}_{K}\Big] \cdot y + f'_v \cdot 1}_{P}$$

Ⓟ = PRODUKTREGELN

$$= f''_{uu} \cdot 1 + f''_{uv} \cdot x + \left[f''_{vu} \cdot 1 + f''_{vv} \cdot x \right] \cdot y + f'_v$$

$$= f''_{uu} + f'_v + f''_{uv} \cdot x + f''_{vu} \cdot y + f''_{vv} \cdot xy \leftarrow$$

[ANTAG ATT f''_{uv}, f''_{vu} ÄR KONTINUERLIGA SÅ ATT $f''_{uv} = f''_{vu}$]

$$= f''_{uu} + f'_v + f''_{uv} \cdot (x+y) + f''_{vv} \cdot xy$$

$$= f''_{uu} + f'_v + f''_{uv} \cdot u + f''_{vv} \cdot v$$

SÅLEDES FÅR VI ATT

$$f''_{xy} = f''_{uu} + u \cdot f''_{uv} + v \cdot f''_{vv} + f'_v$$

(VI HAR ANTAGIT ATT $f \in C^2$.)

$\boxed{2.57}$ LÖS EKVATIONEN

$$(*) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 6 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

GENOM ATT GÖRA SUBSTITUTIONEN

$$\begin{cases} u = x + \alpha y \\ v = x + \beta y \end{cases}$$

SKRIV $f(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ OCH ANVÄND KEDJEREGELN (S.65):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = f_u' + f_v'$$

KOM IHÅG ATT $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ OCKSÅ BEROR PÅ u OCH v. FÖR ATT FÖRENKLA DERIVERINGEN SÅ SKRIV $\frac{\partial f}{\partial u} = g(u,v)$, $\frac{\partial f}{\partial v} = h(u,v)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(g(u,v) + h(u,v)\Big) = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = f''_{uu} + 2 f''_{uv} + f''_{vv}$$

HÄR HAR VI ANTAGIT ATT $f \in C^2$ SÅ $f''_{uv} = f''_{vu}$ GÄLLER (S. 86-87).

BERÄKNA NU RESTEN AV PARTIALDERIVATORNA:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \beta \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = \alpha \cdot f_u' + \beta \cdot f_v'$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \alpha \cdot \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right\} + \beta \cdot \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right\}$$

$$= \alpha \cdot (f''_{uu} + f''_{uv}) + \beta \cdot (f''_{uv} + f''_{vv}) = \alpha f''_{uu} + \cancel{2}\,(\alpha + \beta) f''_{uv} + \beta f''_{vv}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha \cdot \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right\} + \beta \cdot \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right\}$$

$$= \alpha \cdot (\alpha \cdot f''_{uu} + \beta \cdot f''_{uv}) + \beta \cdot (\alpha \cdot f''_{uv} + \beta \cdot f''_{vv}) = \alpha^2 f''_{uu} + 2\alpha\beta f''_{uv} + \beta^2 f''_{vv}$$

SÄTT IN I $(*)$:

$$(f''_{uu} + 2 f''_{uv} + f''_{vv}) + (\alpha f''_{uu} + (\alpha+\beta) f''_{uv} + \beta f''_{vv}) - 6 \cdot (\alpha^2 f''_{uu} + 2\alpha\beta \cdot f''_{uv} + \beta^2 f''_{vv}) = 1$$

$$(\text{i}) \quad (1 + \alpha - 6\alpha^2) f''_{uu} + (2 + \alpha + \beta - 12\alpha\beta) f''_{uv} + (1 + \beta - 6\beta^2) f''_{vv} = 1$$

VI VILL HITTA NÅGON LÖSNING (INTE NÖDVÄNDIGTVIS ALLA LÖSNINGAR) SÅ FÖR ATT GÖRA DET ENKELT FÖR OSS VÄLJER VI α OCH β SÅ ATT $1 + \alpha - 6\alpha^2 = 0 = 1 + \beta - 6\beta^2$ (MED $\alpha \neq \beta$).

2.57
(FORTS)

LÖS EKVATIONEN $1+t-6t^2=0$:

$$t^2-\frac{t}{6}-\frac{1}{6}=0 \Rightarrow \left(t-\frac{1}{12}\right)^2-\frac{1}{12^2}-\frac{1}{6}=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{12}\pm\sqrt{\frac{1}{144}+\frac{24}{144}}=\frac{1}{12}\pm\frac{5}{12} \Rightarrow \begin{cases} t_1=\frac{1}{2} \\ t_2=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

VÄLJ $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{3}$. DÅ BLIR EKV. (i):

$$\text{(ii)} \quad \left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)f''_{uv}=1 \Leftrightarrow f''_{uv}=\frac{6}{25}$$

INTEGRERA FÖR ATT LÖSA DENNA PDE:

$$\int f''_{uv}\,dv=\int\frac{6}{25}dv \Rightarrow f'_u=\frac{6}{25}\cdot v+K_u$$

$$\int f'_u\,du=\int\left(\frac{6}{25}v+K_u\right)du=\frac{6}{25}u\cdot v+\int K_u\,du+K_v$$

DÄR K_u, K_v ÄR "KONSTANTER", D.V.S. DE BEROR EJ PÅ VARIABELN VI INTEGRERAR ÖVER. MED ANDRA ORD SÅ ÄR K_u EN FUNKTION SOM BARA BEROR PÅ u OCH LIKNANDE FÖR K_v.

VI SER ATT LÖSNINGEN TILL (ii) GES AV

$$f(u,v)=\frac{6}{25}\cdot u\cdot v+g(u)+h(v)$$

DÄR g OCH h ÄR TVÅ GÅNGER DERIVERBARA, TY

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{6}{25}v+g'(u), \quad \frac{\partial f}{\partial v\partial u}=\frac{6}{25}.$$

BYT NU TILLBAKA TILL x, y-VARIABLER; $u=x+\frac{y}{2}$, $v=x-\frac{y}{3}$:

SVAR: $f(x,y)=\frac{6}{25}\cdot\left(x+\frac{1}{2}y\right)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\cdot y\right)+g\left(x+\frac{1}{2}y\right)+h\left(x-\frac{1}{3}\cdot y\right)$.

$\boxed{2.60}$

a) $f(x,y) = (1+x+2y)^2$

$f'_x(x,y) = 2(1+x+2y)$

$f'_y(x,y) = 2(1+x+2y)\cdot 2$

$f''_{xx}(x,y) = 2$

$f''_{xy}(x,y) = 4$

$f''_{yy}(x,y) = 8$

$f(1,1) = (1+1+2)^2 = 16$

$f'_x(1,1) = 2\cdot(1+1+2) = 8$

$f'_y(1,1) = 4\cdot(1+1+2) = 16$

TAYLORPOLYNOM I PUNKTEN $(1,1)$

$16 + 8h + 16k$ (ORDNING 1)

$16 + 8h + 16k + h^2 + 4\cdot h\cdot k + 4k^2$ (ORDNING 2)

---

b) $f(x,y) = (1+x+2y)^{-1}$

$f'_x = -(1+x+2y)^{-2}$

$f'_y = -(1+x+2y)^{-2}\cdot 2$

$f''_{xx} = 2(1+x+2y)^{-3}$

$f''_{xy} = 2(1+x+2y)^{-3}\cdot 2$

$f''_{yy} = 2(1+x+2y)^{-3}\cdot 4$

$f(1,1) = (1+1+2)^{-1} = 1/4$

$f'_x(1,1) = -1/4^2 = -1/16$

$f'_y(1,1) = -2/4^2 = -1/8$

$f''_{xx}(1,1) = 2/4^3 = 1/32$

$f''_{xy}(1,1) = 4/4^3 = 1/16$

$f''_{yy}(1,1) = 8/4^3 = 1/8$

TAYLORPOLYNOM I PUNKTEN $(1,1)$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{4} - \frac{h}{16} - \frac{k}{8}}_{\text{ORDN. 1}} + \frac{h^2}{64} + \frac{h\cdot k}{16} + \frac{k^2}{16}}_{\text{ORDN. 2}}$$

$\boxed{2.61}$

a) $f(x,y) = (1+x+y^2)^{1/2}$

$$f'_x = \frac{1}{2}(1+x+y^2)^{-1/2}$$

$$f'_y = \frac{1}{2}(1+x+y^2)^{-1/2} \cdot 2y$$

$$f''_{xx} = -\frac{1}{4}(1+x+y^2)^{-3/2}$$

$$f''_{xy} = -\frac{1}{4}(1+x+y^2)^{-3/2} \cdot 2y$$

$$f''_{yy} = -\frac{1}{2}(1+x+y^2)^{-3/2} \cdot 2y^2 + (1+x+y^2)^{-1/2}$$

$f(0,0) = 1$

$f'_x(0,0) = \frac{1}{2}$

$f'_y(0,0) = 0$

$f''_{xx}(0,0) = -\frac{1}{4}$

$f''_{xy}(0,0) = 0$

$f''_{yy}(0,0) = 1$

TAYLORPOLYNOM I $(0,0)$, ORDNING 2:

$$1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{k^2}{2}$$

---

b) $f(x,y) = (1+x)^{1+y} = \exp\{(1+y)\cdot \log(1+x)\}$

$$f'_x = (1+y)\cdot(1+x)^y$$

$$f'_y = \log(1+x)\cdot(1+x)^{1+y}$$

$$f''_{xx} = y(1+y)\cdot(1+x)^{y-1}$$

$$f''_{xy} = (1+x)^y + (1+y)\cdot\log(1+x)\cdot(1+x)^y$$

$$f''_{yy} = [\log(1+x)]^2\cdot(1+x)^{1+y}$$

$f(0,0) = 1$

$f'_x(0,0) = 1$

$f'_y(0,0) = 0$

$f''_{xx}(0,0) = 0$

$f''_{xy}(0,0) = 1$

$f''_{yy}(0,0) = 0$

TAYLORPOLYNOM I $(0,0)$, ORDN. 2:

$$1 + h + h\cdot k$$

$\boxed{2.63}$

a) $Q(h,k) = h^2 + 6k^2 + 4hk = (h+2k)^2 + 2k^2 > 0$ DÅ $(h,k) \neq (0,0)$

D.V.S $Q(h,k)$ ÄR POSITIVT DEFINIT

b) $Q(h,k,l) = h^2 + 2k^2 + 8l^2 + 2hk + 2hl = h^2 + 2h(k+l) + 2k^2 + 8l^2$

$$= (h+k+l)^2 - (k+l)^2 + 2k^2 + 8l^2 =$$

$$= (h+k+l)^2 + k^2 + 7l^2 \cancel{+} - 2kl =$$

$$= (h+k+l)^2 + (k-l)^2 + 6l^2 > 0$$ DÅ $(h,k,l) \neq 0$

D.V.S $Q(h,k,l)$ ÄR POSITIVT DEFINIT.

$\boxed{2.66}$ $f(x,y) = 3x^2 + 3xy + y^2 + y^3$

SÖK STATIONÄRA PUNKTER (D.V.S. LÖS ∇ grad $f(x,y,z) = 0$)

$$\text{grad } f = (6x + 3y,\ 3x + 2y + 3y^2) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 6x + 3y &= 0 \\ 3x + 2y + 3y^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3y - 4y - 6y^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-y(1 + 6y) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -1/6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{6}\cdot(-3y) = \frac{1}{12} \end{cases}$$

STATIONÄRA PUNKTER: $(0,0)$ OCH $(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6})$.

~~MANAGRAMMERNA~~

BETRAKTA ORDNING 2 DERIVATOR

$$f''_{xx} = 6, \quad f''_{xy} = 3, \quad f''_{yy} = 2 + 6y$$

I PUNKTEN $(0,0)$ FÅR VI DEN KVADRATISKA FORMEN

$$Q_1(h,k) = 6h^2 + 2\cdot 3\cdot h\cdot k + 2\cdot k^2 =$$

$$= 2\cdot\left[3h^2 + 3\cdot h\cdot k + k^2\right] = 2\cdot\left[\left(\frac{3h}{2}+k\right)^2 - \frac{9}{4}h^2 + 3h^2\right]$$

$$= 2\cdot\left[\left(\frac{3h}{2}+k\right)^2 + \frac{3}{4}h^2\right] > 0 \quad \text{DÅ} \quad (h,k) \neq 0$$

SÅ $Q_1(h,k)$ ÄR POSITIVT DEFINIT, DVS $(0,0)$ ÄR EN STRIKT LOKALT MINIMUM.

I PUNKTEN $(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6})$ FÅR VI DEN KVADRATISKA FORMEN

$$Q_2(h,k) = 6h^2 + 6\cdot h\cdot k + k^2 = (3h+k)^2 - 3h^2$$

SOM ÄR INDEFINIT, TY $Q_2(h,-3h) = -3h^2 < 0$, OCH $Q_2(0,k) = k^2 > 0$. D.V.S. $(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6})$ ÄR EN SADELPUNKT.

$\boxed{2.67}$ $f(x,y) = x^3y^2 + 27xy + 27y$

SÖK STATIONÄRA PUNKTER

$$\text{grad } f = (3x^2y^2 + 27y,\ 2x^3y + 27x + 27) = (0,0)$$

$$3x^2y^2 + 27y = 0 \iff 3y(x^2y + 9) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = 0 \quad \text{EL.} \quad y = -\frac{9}{x^2}$$

$y = 0$: $\quad 27x + 27 = 0 \iff x = -1$

$y = -\frac{9}{x^2}$: $\quad 2x^3 \cdot \left(-\frac{9}{x^2}\right) + 27x + 27 = 0$

$(x \neq 0)$ $\quad -18x + 27x + 27 = 0$

$$9x + 27 = 0 \iff x = -\frac{27}{9} = -3$$

$$\Downarrow$$

$$y = -\frac{9}{(-3)^2} = -1$$

STATIONÄRA PUNKTER: $(-1,0)$ OCH $(-3,-1)$.

BESTÄM ANDRA ORDN. TERMER:

$$f''_{xx} = 6xy^2, \quad f''_{xy} = 6x^2y + 27, \quad f''_{yy} = 2x^3$$

I PUNKTEN $(-1,0)$:

$$Q_1(h,k) = 2 \cdot 27 \cdot h \cdot k - 2k^2 = 2k(27h - k) \qquad \text{(INDEFINIT)}$$

I PUNKTEN $(-3,-1)$:

$$Q_2(h,k) = -6 \cdot 3h^2 + 2(-6 \cdot 9 + 27)h \cdot k - 2 \cdot 27k^2$$

$$= -18h^2 - 54h \cdot k - 54k^2$$

$$= -18 \cdot (h^2 + 3h \cdot k + 3k^2) = -18 \cdot \left(\left(h + \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{9}{4}k^2 + 3k^2\right)$$

$$= -18 \cdot \left(\left(h + \frac{3}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right) \qquad \text{(NEGATIVT DEFINIT)}$$

SVAR: $(-3,-1)$ ÄR ETT LOKALT MAX.

SAMMANFATTNING – LEKTION 3

BEGREPP:

- PARTIELLA DERIVATOR AV HÖGRE ORDNING (s. 85)
- KLASSEN C^k (s. 86)
- LOKALA EXTREMVÄRDEN (s. 99)
- KVADRATISKA FORMER (s. 101)
- DIFFERENTIALER (s. 113)
- VARIABELBYTE (s. 89)

SATSER:

- OMKASTNING AV DERIVATIONSORDNING, SATS 9 (s. 87)
- TAYLORS FORMEL, ANDRA ORDNINGEN, TVÅ VARIABLER, SATS 10 (s. 94)
- STATIONÄRA PUNKTER OCH LOKALA EXTREMVÄRDEN, SATS 11 (s. 99)
- KVADRATISKA FORMER OCH —— " ——, SATS 12 (s. 111)