LEKTION 4 (1/2/08) SF1646 BJÖRN WINCKLER winckler@kth.se

30/1/09

$\boxed{3.3}$ $\bar{x}(t) = (\cos t, 2\cdot\sin t, t)$, $t > 0$

BESTÄM a) HASTIGHET, b) FART, c) ACCELERATION, I $(-1,0,\pi)$.

a) HASTIGHETEN GES AV $\bar{x}'(t)$:

$$\bar{x}'(t) = (-\sin t, 2\cdot\cos t, 1)$$

b) FARTEN GES AV $|\bar{x}'(t)|$:

$$|\bar{x}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (2\cdot\cos t)^2 + 1} = \sqrt{\underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t} + 4\cos^2 t + 1}$$

$$= \sqrt{2 + 3\cos^2 t}$$

c) ACCELERATIONEN GES AV $\bar{x}''(t)$:

$$\bar{x}''(t) = (-\cos t, -2\cdot\sin t, 0)$$

I PUNKTEN $(-1,0,\pi)$ ÄR $t = \pi$ (LÄGG MÄRKE TILL ATT PUNKTEN VERKLIGEN LIGGER PÅ KURVAN, TY $\bar{x}(\pi) = (\cos\pi, 2\cdot\sin\pi, \pi) = (-1,0,\pi)$.).

VI FÅR GENAST SVARET

$$\begin{cases} \bar{x}'(\pi) = (-\sin\pi, 2\cdot\cos\pi, 1) = (0,-2,1) & \text{(HASTIGHET)} \\ |\bar{x}'(\pi)| = \sqrt{2+3\cdot\cos^2\pi} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5} & \text{(FART)} \\ \bar{x}''(\pi) = (-\cos\pi, -2\cdot\sin\pi, 0) = (1,0,0) & \text{(ACCELERATION)} \end{cases}$$

$\boxed{3.4}$ GIVET PLAN $x-y+z=3$ OCH HYPERBOLOID $x^2+y^2-z^2=1$.
DESSA SKÄR VARANDRA I EN KURVA γ, VARS TANGENT I PUNKTEN $(2,1,2)$ SKALL BESTÄMMAS.

LÄGG MÄRKE TILL ATT EN TANGENT TILL γ I PUNKTEN $\bar{a}$ MÅSTE VARA VINKELRÄT MOT NORMALEN TILL PLANET I $\bar{a}$, SAMT NORMALEN TILL HYPERBOLOIDEN I $\bar{a}$. DVS, OM NORMALVEKTORERNA I $\bar{a}$ ÄR $\bar{v}$ OCH $\bar{w}$, DÅ GES TANGENTENS RIKTNING TILL γ I $\bar{a}$ AV $\bar{v}\times\bar{w}$.

BESTÄM NORMALERNA (KOM IHÅG ATT NORMALRIKTNINGARNA GES AV GRADIENTEN):

$$\bar{v} = \operatorname{grad}(x-y+z)\Big|_{(x,y,z)=(2,1,2)} = (1,-1,1)$$

$$\bar{w} = \operatorname{grad}(x^2+y^2-z^2)\Big|_{(x,y,z)=(2,1,2)} = (2x,2y,-2z)\Big|_{(x,y,z)=(2,1,2)}$$

$$= (4,2,-4)$$

TANGENTENS RIKTNING TILL γ I $(2,1,2)$ ÄR ALLTSÅ

$$\bar{n} = \bar{v}\times\bar{w} = ((-1)\cdot(-4)-1\cdot 2,\ 1\cdot 4-1\cdot(-4),\ 1\cdot 2-(-1)\cdot 4)$$

$$= (2,8,6)$$

TANGENTENS EKVATION GES DÅ AV

$$(x,y,z) = (2,1,2)+t\cdot(2,8,6), \quad t\in\mathbb{R}$$

3.6 GIVET YTAN $\bar{r}(s,t)$:

$$\begin{cases} x = (2-\cos t)\cos s \\ y = (2-\cos t)\sin s \\ z = \sin t \end{cases}, \quad \begin{array}{l} -\pi \le s \le \pi \\ -\pi \le t \le \pi \end{array}, \qquad \bar{r}(s,t) = (x,y,z)$$

BESTÄM EN NORMALRIKTNING TILL YTAN I PUNKTEN $(1,\sqrt{3},1)$.

NORMALRIKTNINGEN I EN PUNKT KAN SKRIVAS SOM EN KRYSSPRODUKT AV TVÅ (ICKE-PARALLELLA) TANGENTER I PUNKTEN.

LÅT γ VARA KURVAN $t \mapsto \bar{r}(s,t)$ (s FIXT) OCH LÅT δ VARA KURVAN $s \mapsto \bar{r}(s,t)$ (t FIXT).

DÅ ÄR TANGENTER TILL γ OCH δ OCKSÅ TANGENTER TILL YTAN. TANGENTERNA GES AV

$$\gamma'(t) = (\sin t\cdot\cos s,\ \sin t\cdot\sin s,\ \cos t) \qquad \left(= \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right)$$

$$\delta'(s) = (-(2-\cos t)\sin s,\ (2-\cos t)\cos s,\ 0) \qquad \left(= \frac{\partial \bar{r}}{\partial s}\right)$$

DÄR γ' OCH δ' EJ ÄR PARALLELLA SÅ GES EN NORMALRIKTN. TILL YTAN AV

(i)
$$\gamma'(t)\times\delta'(s) = \big(0 - \cos t\cdot(2-\cos t)\cdot\cos s,\ \cos t\cdot(-1)(2-\cos t)\cdot\sin s,\ \sin t\cdot\cos s\cdot(2-\cos t)\cdot\cos s - \sin t\cdot\sin s\cdot(-1)\cdot(2-\cos t)\sin s\big)$$

I PUNKTEN $(1,\sqrt{3},1)$ GÄLLER

$$\begin{cases} (2-\cos t)\cdot\cos s = 1 \\ (2-\cos t)\cdot\sin s = \sqrt{3} \\ \sin t = 1 \end{cases}$$

EFTERSOM $\sin t = 1 \Leftrightarrow \cos t = 0$ FÅR VI (I PUNKTEN $(1,\sqrt{3},1)$ FORTFARANDE)

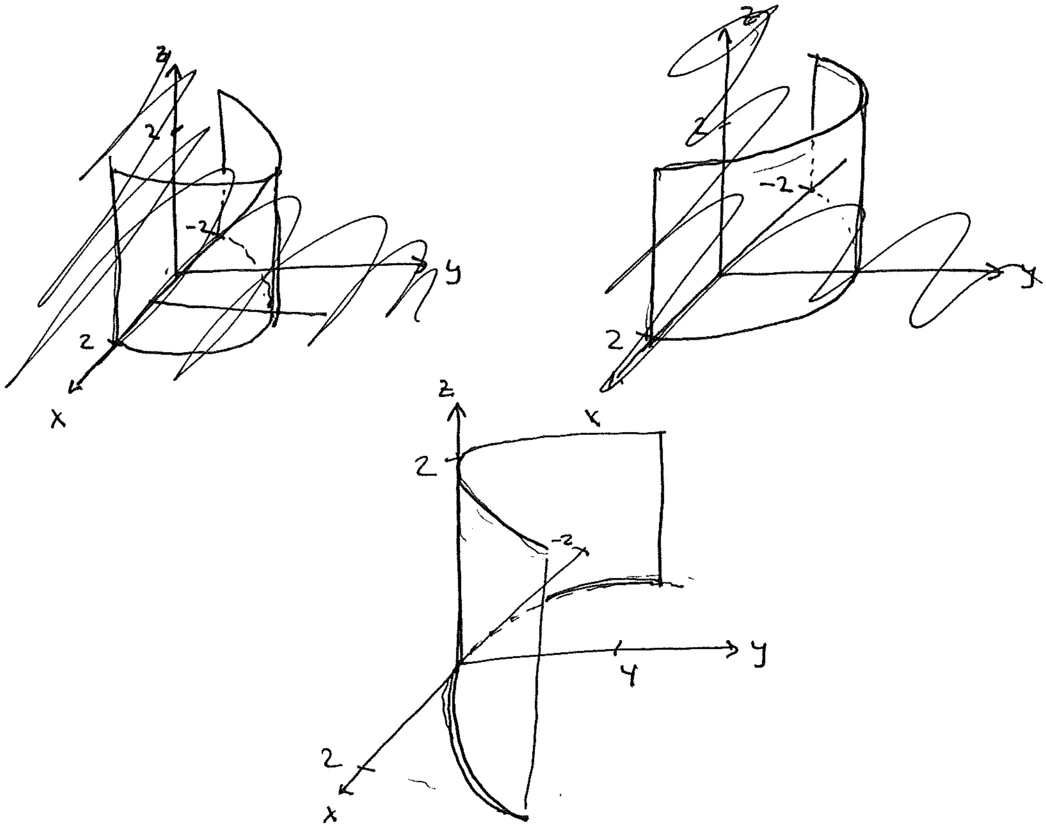
$$\begin{cases} 2\cdot\cos s = 1 \\ 2\cdot\sin s = \sqrt{3} \\ \cos t = 0 \end{cases}$$

VILKET EFTER INSÄTTNING I (i) GER EN NORMALRIKTNING I $(1,\sqrt{3},1)$

$$\bar{n} = \left(0,\ 0,\ \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}\right) = (0,0,2)$$

$\boxed{3.8}$ SKISSERA YTAN $Y: \bar{r} = (t, t^2, s)$, $-2 \le t \le 2$, $0 \le s \le 2$.
BESTÄM NORMALVEKTORER I $(1,1,1)$ OCH $(0,0,1)$. SKRIV ÄVEN YTAN SOM EN NIVÅYTA.

VARJE SKÄRNING MELLAN Y OCH PLANET $\{(x,y,z) \mid z = s \text{ KONST.}\}$ GES AV PARABOLEN $t \mapsto (t, t^2)$ (OBEROENDE AV s). SÅLEDES ÄR Y EN "CYLINDERYTA":



NORMALVEKTORER GES AV

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = (1, 2t, 0) \times (0,0,1) = (2t, 1, 0)$$

NORMAL I $(1,1,1)$:

$$\bar{n} = (2,1,0) \qquad [t=1]$$

NORMAL I $(0,0,1)$:

$$\bar{n} = (0,1,0) \qquad [t=0]$$

EFTERSOM ATT $x^2 = y$ PÅ Y FÅR VI ATT Y GES SOM NIVÅYTAN: ~~[illegible]~~

$$x^2 - y = 0$$

$\boxed{3.18}$ LÅT $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = \sin(x^2+y^2) \end{cases}$ BERÄKNA $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$

$u'_x = 2x$

$u'_y = 2y$

$v'_x = \cos(x^2+y^2) \cdot 2 \cdot x$

$v'_y = \cos(x^2+y^2) \cdot 2y$

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ x \cdot \cos(x^2+y^2) & y \cdot \cos(x^2+y^2) \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \left[xy \cdot \cos(x^2+y^2) - yx\cos(x^2+y^2) \right] = 0$$

$\boxed{3.23}$

EKVATIONEN $x^3y + 2y^3x = 3$ GER IMPLICIT y SOM EN FUNKTION AV x. BESTÄM DERIVATAN $y'(1)$.

VI SKULLE KUNNA FÖRSÖKA LÖSA UT y UR EKVATIONEN OCH SEDAN DERIVERA. ETT ENKLARE ALTERNATIV ÄR ATT DERIVERA IMPLICIT, DVS. ANVÄND KEDJEREGELN OCH DERIVERA PÅ BÅDA SIDOR AV LIKHETSTECKNET:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{x^3y + 2y^3x\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{3\right\}$$

$$3x^2\cdot y + x^3\cdot y' + 2\cdot\left[3y^2\cdot y'\cdot x + y^3\right] = 0$$

$$x^3\cdot y' + 6y^2\cdot x\cdot y' = -(3x^2y + 2y^3)$$

$$y' = -\frac{3x^2y + 2y^3}{6y^2x + x^3}$$

I PUNKTEN $(1,1)$ ÄR $y(1) = 1$ SÅ

$$y'(1) = -\frac{3\cdot 1^2\cdot y(1) + 2y(1)^3}{6\cdot y(1)^2\cdot 1 + 1^3} = -\frac{3+2}{6+1} = -\frac{5}{7}$$

$\boxed{3.25}$ LÅT $f(x,y) = \sin(xy) - \ln(x+y)$.

VISA ATT $f(x,y) = 0$ DEFINIERAR y SOM EN FUNKTION AV x LOKALT KRING PUNKTEN $(0,1)$. BERÄKNA $y'(0)$

LÄGG MÄRKE TILL ATT $(0,1)$ TILLHÖR KURVAN $f(x,y)=0$, TY

$$f(0,1) = \sin 0 - \ln 1 = 0.$$

ENLIGT IMPLICITA FUNKTIONSSATSEN (S.148) KAN VI SKRIVA $y = y(x)$ KRING $(0,1)$ OM $f'_y(0,1) \neq 0$. BERÄKNA DENNA:

$$f'_y(x,y) = \cos(xy)\cdot x - \frac{1}{x+y}, \quad f'_y(0,1) = \cos 0 \cdot 0 - \frac{1}{1} = -1 \neq 0.$$

ALLT SOM ÅTERSTÅR ÄR ATT BERÄKNA $y'(0)$; ANVÄND IMPLICITDERIVERING. D.V.S. SKRIV $y = y(x)$ OCH DERIVERA $f(x,y) = 0$ M.A.P. x:

$$\frac{d}{dx}\left\{ \sin(x\cdot y(x)) - \ln(x + y(x)) \right\} = \frac{d}{dx}\{0\}$$

$$(*) \quad \cos(x\cdot y(x))\cdot\left(y(x) + x\cdot y'(x)\right) - \frac{1+y'(x)}{x+y(x)} = 0$$

DÅ $x = 0$ ÄR $y = 1$ (ENLIGT VÅR TIDIGARE BERÄKNING ATT $(0,1)$ LIGGER PÅ KURVAN $f(x,y)=0$). STOPPA IN $x=0$, $y(0)=1$ I $(*)$:

$$\cos 0 \cdot (1 + 0\cdot y'(0)) - \frac{1+y'(0)}{1} = 0 \implies 1 - (1+y'(0)) = 0$$

$$\implies \underline{\underline{y'(0) = 0}}$$

$\boxed{3.28}$ LÅT $F(x,y,z) = e^{z-1} + zy + x - 2y^3$, LÅT $\bar{P} = (0,1,1)$.

a) BESTÄM EN EKVATION FÖR TANGENTPLANET I $\bar{P}$ TILL YTAN $F(x,y,z) = 0$.

NOTERA FÖRST ATT $F(\bar{P}) = e^{1-1} + 1 \cdot 1 + 0 - 2 \cdot 1^3 = 1 + 1 - 2 = 0$, SÅ $\bar{P}$ LIGGER I YTAN. TANGENTPLANETS EKVATION I $\bar{P}$ GES AV

$$\bar{n} \cdot (\bar{r} - \bar{P}) = 0$$

DÄR $\bar{n}$ ÄR NORMALEN TILL YTAN I $\bar{P}$ OCH $\bar{r} = (x,y,z)$.

NORMALEN GES AV GRADIENTEN

$$\text{grad } F = (1,\ z - 6y^2,\ e^{z-1} + y)$$

$$\bar{n} = \text{grad } F(\bar{P}) = (1,\ 1 - 6 \cdot 1^2,\ e^{1-1} + 1) = (1, -5, 2)$$

SÅLEDES ÄR TANGENTPLANETS EKVATION

$$x - 5(y-1) + 2(z-1) = 0$$

---

b) DÅ

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\bar{P}) = e^{1-1} + 1 = 2 \neq 0$$

GER IMPLICITA FUNKTIONSSATSEN ATT z KAN LÖSAS UT SOM FUNKTION AV (x,y) KRING $\bar{P}$.

SAMMANFATTNING – LEKTION 4

BEGREPP:

- KURVOR (TANGENTVEKTOR (S.121), HASTIGHET/FART/ACCELERATION (S.121), ORTSVEKORNOTATION $\bar{r}(t)$ (S.121))
- YTOR (ORTSVEKTORNOTATION $\bar{r}(s,t)$ (S.126), NORMALVEKTOR (S.127))
- DERIVATA AV VEKTORVÄRDA FUNKTIONER (FUNKTIONALMATRIS (S.129), LINJARISERING (S.132), KEDJEREGELN (S.137), JACOBIANEN (S.140))
- IMPLICITA FUNKTIONER (S.146)

SATSER:

- DERIVATAN AV SAMMANSÄTTNING AV TVÅ VEKTORVÄRDA FUNKTIONER, SATS 1 (S.141) [KEDJEREGELN]
- INVERSA FUNKTIONSSATSEN (S.144)
- IMPLICITA FUNKTIONSSATSEN (S.148)