LEKTION 5 (6/2/08) 4/2/09 SF1646

BJÖRN WINCKLER
winckler@kth.se

$\boxed{4.1}$ $f : D \to \mathbb{R}$ ÄR KONTINUERLIG. BESTÄM OM f NÖDVÄNDIGTVIS ANTAR ETT EXTREMVÄRDE (PÅ D) OM

a) $D = \{(x,y) : |x| \le 1,\ |y| < 1\}$

UPPGIFTEN GÅR UT PÅ ATT AVGÖRA OM D ÄR KOMPAKT ELLER INTE. OM D ÄR KOMPAKT SÅ GER SATS 4 (S. 41) ATT SVARET ÄR "JA". OM D EJ ÄR KOMPAKT SÅ KAN VI INTE MED SÄKERHET SÄGA OM f ANTAR SINA EXTREMVÄRDEN (DET BEROR PÅ f), SÅ I DET FALLET ÄR SVARET "NEJ".

KOM IHÅG ATT D ÄR KOMPAKT OM OCH ENDAST OM D ÄR SLUTEN (D.V.S. RANDPUNKTER TILL D TILLHÖR D) OCH BEGRÄNSAD (D.V.S. DET FINNS EN CIRKELSKIVA AV RADIE r, S_r, SÅDAN ATT $D \subset S_r$).

<u>SVAR</u>: NEJ. (D ÄR BEGRÄNSAD MEN EJ SLUTEN)

b) $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

<u>SVAR</u>: JA. (D ÄR EN CIRKELSKIVA MED RADIE 1)

c) $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \ge 1\}$

<u>SVAR</u>: NEJ. (D ÄR SLUTEN, MEN EJ BEGRÄNSAD.)

d) $D = \{(x,y) : x \cdot y \ge 1\}$

<u>SVAR</u>: NEJ. (D ÄR SLUTEN, MEN EJ BEGRÄNSAD.)

e) $D = \{(x,y) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1\}$

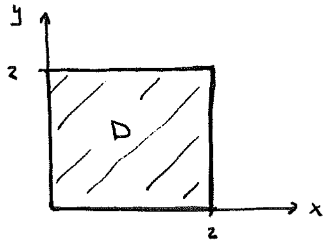
<u>SVAR</u>: JA. (D ÄR EN TRIANGEL)

$\boxed{4.6}$ $f : D \to \mathbb{R}$ $D = \{ (x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 \}$

$(x,y) \mapsto 4x^2y^2 - 2xy^4 - 3x^2$

BESTÄM FUNKTIONENS STÖRSTA OCH MINSTA VÄRDE (I D).

LÄGG MÄRKE TILL ATT D ÄR EN KOMPAKT MÄNGD, SAMT SÅ ÄR f KONTINUERLIG, SÅ SATS 4 (S.41) GER ATT f ANTAR SINA EXTREMVÄRDEN (I D).



BESTÄM EXTREMVÄRDEN PÅ RANDEN:

$x = 0$: $f(0,y) = 0$

$x = 2$: $f(2,y) = 16y^2 - 4y^4 - 12 = g_1(y)$

$$g_1'(y) = 32y - 16y^3 = 0 \implies 16y(2 - y^2) = 0 \implies \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$y = 0$: $f(2,0) = -3 \cdot 2^2 = -12$

$y = \sqrt{2}$: $f(2,\sqrt{2}) = 16 \cdot 2 - 4 \cdot 4 - 12 = 4$

($y = -\sqrt{2}$ TILLHÖR EJ D!)

$y = 2$: $f(2,2) = 16 \cdot 4 - 4 \cdot 16 - 12 = -12$

$y = 0$: $f(x,0) = -3x^2 = g_2(x)$

$$g_2'(x) = -6x = 0 \implies x = 0$$

$x = 0$: $f(0,0) = 0$

($x = 2$: $f(2,0) = -12$)

$y = 2$: $f(x,2) = 16x^2 - 32x - 3x^2 = 13x^2 - 32x = g_3(x)$

$$g_3'(x) = 26x - 32 = 0 \implies x = \frac{32}{26} = \frac{16}{13}$$

$x = \frac{16}{13}$: $f\left(\frac{16}{13}, 2\right) = \frac{13 \cdot 16^2}{13^2} - \frac{32 \cdot 16}{13} = \frac{16^2}{13}\left(1 - \frac{2}{\cancel{}}\right) = \cancel{} = -\frac{16^2}{13}$

4.6

(FORTS.)

SÖK STATIONÄRA PUNKTER I DET INRE AV D:

$$\text{grad } f = (8xy^2 - 2y^4 - 6x,\ 8x^2y - 8xy^3) = 0$$

$$8x^2y - 8xy^3 = 0 \implies x - y^2 = 0 \quad (x \neq 0,\ y \neq 0)$$

$$8y^2 \cdot y^2 - 2y^4 - 6y^2 = 0 \implies 6y^4 - 6y^2 = 0 \implies y^2 - 1 = 0 \quad (y \neq 0)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 1 \quad (y = -1, \text{ EJ I } D)$$

$$y = 1 \implies x = y^2 = 1$$

D.V.S. f HAR EN STATIONÄR PUNKT: $(1,1)$

$$f(1,1) = 4 - 2 - 3 = -1$$

SAMMANFATTNINGSVIS: $f(2, \sqrt{2}) = 4$ (MAXIMUM)

$f\left(\frac{16}{13}, 2\right) = -\frac{16^2}{13}$ (MINIMUM)

$\boxed{4.12}$ BESTÄM EXTREMVÄRDEN TILL

$$f(x,y) = (x^2+3y^2)\cdot e^{-x^2-y^2}, \quad \text{DÅ} \quad (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$$

D ÄR EN SLUTEN CIRKELSKIVA MED RADIEN 2, D.V.S. D ÄR KOMPAKT.

SÖK STATIONÄRA PUNKTER I DET INRE AV D:

$$\nabla f(x,y) = \left((2x - 2x(x^2+3y^2))e^{-x^2-y^2}, \ (6y-2y(x^2+3y^2))e^{-x^2-y^2} \right)$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x(1-x^2-3y^2) = 0 \\ 2y(3-x^2-3y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ EL. } 1-x^2-3y^2=0 \\ y=0 \text{ EL. } 3-x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ 3-x^2-3y^2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3-3y^2=0 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$\left.\begin{matrix} y=0 \\ 1-x^2-3y^2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\left.\begin{matrix} 1-x^2-3y^2=0 \\ 3-x^2-3y^2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1-x^2-3y^2-(3-x^2-3y^2)=0 \Rightarrow -2=0$$ LÖSNING SAKNAS!

VI HAR SÅLEDES FEM STATIONÄRA PUNKTER:

$$(0,0), \ (0,\pm 1), \ (\pm 1, 0)$$

UNDERSÖK f PÅ RANDEN TILL D, D.V.S. DÅ $x^2+y^2=4$:

$$\underset{(x^2+y^2=4)}{f(x,y)} = (4-y^2+3y^2)e^{-4} = (4+2y^2)\cdot e^{-4} = g(y)$$

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2$$ (ANNARS SAKNAR EKV. $x^2=4-y^2$ LÖSN.)

EXTREMVÄRDEN TILL $g(y)$ DÅ $-2\leq y \leq 2$ ÄR

$$g(0) = 4e^{-4}, \quad g(\pm 2) = (4+2\cdot 4)e^{-4} = 12e^{-4}$$

VÄRDEN I STATIONÄRA PUNKTER OVAN ÄR:

$$f(0,0) = 0, \quad f(0,\pm 1) = 3e^{-1}, \quad f(\pm 1, 0) = e^{-1}$$

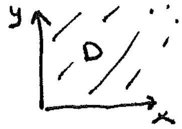
MINVÄRDE TILL f ÄR SÅLEDES 0 OCH MAXVÄRDE $3e^{-1}$, TY:

$$\frac{12e^{-4}}{3e^{-1}} = 4e^{-3} < \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 12e^{-4} < 3e^{-1}$$

SVAR: MIN 0, MAX $3e^{-1}$.

$\boxed{4.19}$ BESTÄM STÖRSTA OCH MINSTA VÄRDE AV

$$f(x,y) = (x^2+y)e^{-x-y}, \quad \text{DÅ} \quad (x,y) \in D = \{(x,y) : 0 \le x < \infty, 0 \le y < \infty\}.$$



SÖK STATIONÄRA PUNKTER I DET INRE AV D:

$$\nabla f(x,y) = \left(2x e^{-x-y} - (x^2+y)e^{-x-y},\ e^{-x-y} - (x^2+y)e^{-x-y}\right)$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x-y} \cdot (2x - x^2 - y) = 0 \\ e^{-x-y} \cdot (1 - x^2 - y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - x^2 - y = 0 \\ 1 - x^2 - y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x - x^2 - y - (1 - x^2 - y) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

D.V.S. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ ÄR DEN ENDA STATIONÄRA PUNKTEN.

SÖK EXTREMPUNKTER PÅ RANDEN:

$\underline{x=0}$: $\quad f(0,y) = y e^{-y} =: g(y)$

$\quad g'(y) = e^{-y} - y e^{-y} = e^{-y}(1-y) = 0 \Rightarrow y = 1$

$\underline{y=0}$: $\quad f(x,0) = x^2 e^{-x} =: h(x)$

$\quad h'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x e^{-x} \cdot (2-x) = 0 \Rightarrow x = 0$ EL. $x = 2$

PUNKTERNA $(0,1), (0,0), (2,0)$ ÄR SÅLEDES MÖJLIGA EXTREMPUNKTER PÅ RANDEN.

VI FÅR FÖLJANDE VÄRDEN I DESSA PUNKTER:

$$f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right) = \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = e^{-5/4}$$

$$f(0,1) = e^{-1}, \quad f(0,0) = 0, \quad f(2,0) = 4e^{-2}$$

DÅ $0 < e^{-5/4} < e^{-1} < 4e^{-2}$ SER VI ATT DET MINSTA VÄRDET ÄR 0 (TY $f(x,y) \ge 0$ PÅ D) OCH ATT DET STÖRSTA VÄRDET ÄR $4e^{-2}$, TY $f(x,y) \to 0$ DÅ $|(x,y)| \to \infty$:

STANDARD GR.V.

$$\text{OM } x+y=K \Rightarrow f(x,y) = (x^2 + K - x)e^{-K} \le (x^2 - x + K)e^{-x} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

OBS ATT DET ÄR VIKTIGT ATT KONTROLLERA ATT DE PUNKTER VI HITTAR VERKLIGEN GER MIN & MAX NÄR VI UNDERSÖKER FUNKTIONER SOM ÄR DEFINIERADE PÅ ICKE-KOMPAKTA OMRÅDEN!

SVAR: MIN 0, MAX $4e^{-2}$.

$\boxed{4.22}$ $f(x,y) = (x^2+xy+y^2)e^{-x-2y}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

HAR f NÅGOT STÖRSTA / MINSTA VÄRDE?

LÄGG MÄRKE TILL ATT

$$x^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$$

SAMT

$$e^{-x-2y} > 0$$

VILKET VISAR ATT $f(x,y) \geq 0$. ATT $f(x,y)$ ~~min~~ ANTAR VÄRDET 0 FÅR VI FRÅN

$$f(0,0) = 0 \cdot e^0 = 0$$

SÅLEDES HAR f MINSTA VÄRDET 0.

DOCK HAR f EJ NÅGOT STÖRSTA VÄRDE, TY

$$f(x,0) = x^2 e^{-x} \longrightarrow \infty \quad \text{DÅ} \quad x \to -\infty$$

SAMMANFATTNING - LEKTION 5

BEGREPP:
- OPTIMERING (s. 157)
- KOMPAKT MÄNGD (s. 15)
- INRE PUNKTER / RANDPUNKTER (s. 11)
  DESS BETYDELSE I OPTIMERING (s. 159)

SATSER:
- EXISTENS AV MAX/MINVÄRDEN OCH KOMPAKTA DEFINITIONSMÄNGDER, SATS 4 (s. 41)
- LOKALA EXTREMVÄRDEN, SATS 11 (s. 99) SAMT SATS 12 (s. 111)