BJÖRN WINCKLER
winckler@kth.se

LEKTION 6 5/2/09 SF1646

$\boxed{4.25}$ BESTÄM MIN & MAX AVSTÅND FRÅN ORIGO TILL ELLIPSEN

$$13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72.$$

LÅT $f(x,y) = x^2 + y^2$ VARA KVADRATEN PÅ AVSTÅNDET FRÅN ORIGO TILL (x,y).
LÅT $g(x,y) = 13x^2 + 13y^2 + 10xy - 72$ (SÅ ELLIPSEN GES AV $g(x,y) = 0$).
PROBLEMET BLIR DÅ:

HITTA EXTREMVÄRDEN TILL $f(x,y)$ DÅ $g(x,y) = 0$.

f ÄR DEFINIERAD PÅ $\mathbb{R}^2$ (ALLA PUNKTER ÄR INRE PUNKTER) OCH ELLIPSEN HAR INGA ÄNDPUNKTER SÅ SATS 1 (S.173) KAN TILLÄMPAS. SÖK (x,y) SÅDANA ATT

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \quad \text{OCH} \quad g(x,y) = 0, \quad \text{DÄR } \lambda \in \mathbb{R}$$

DETTA GER

$$\left.\begin{aligned} 2x &= \lambda\cdot(26x + 10y) \\ 2y &= \lambda\cdot(26y + 10x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x}{13x+5y} = \frac{y}{13y+5x}$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 13xy = 5y^2 + 13xy \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{EL.} \\ x = -y \end{cases}$$

OM $x = y$:
$$g(x,x) = 13x^2 + 13x^2 + 10x^2 - 72 = 36x^2 - 72 = 0 \Rightarrow x^2 = 2$$

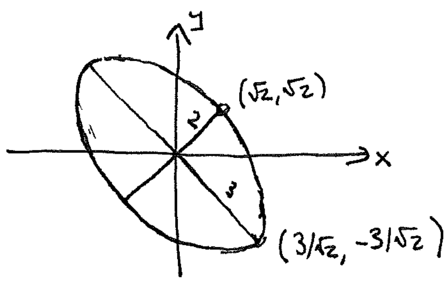
OM $x = -y$:
$$g(x,-x) = 13x^2 + 13x^2 - 10x^2 - 72 = 16x^2 - 72 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{2}$$

AVSTÅNDEN FÖR DESSA PUNKTER BLIR:

$x^2 = y^2 = 2$: $\sqrt{f(x,y)} = \sqrt{2+2} = 2$ (MIN)

$x^2 = y^2 = \frac{9}{2}$: $\sqrt{f(x,y)} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}} = 3$ (MAX)

VI KAN SKISSA ELLIPSEN: LILLAXELN HAR LÄNGD 2 OCH SAMMANKOPPLAR $x = y = \sqrt{2}$ MED ORIGO; STORAXELN HAR LÄNGD 3 OCH SAMMANKOPPLAR $x = -y = 3/\sqrt{2}$ MED ORIGO.

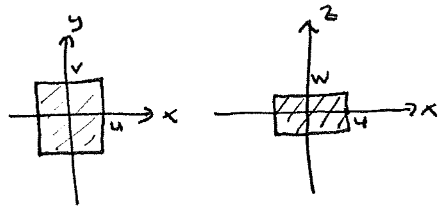


SVAR: AVSTÅND MIN = 2, MAX = 3.

$\boxed{4.29}$ EN PARALLELLEPIPED MED KANTERNA PARALLELLA MED AXLARNA ÄR INSKRIVEN I ELLIPSOIDEN

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

VILKEN ÄR DEN STÖRSTA VOLYM PARALLELLEPIPEDEN KAN ANTA ?



OM P.-E. HAR SIDORNA $2u, 2v, 2w$ SOM I FIG. SÅ ÄR VOLYMEN

$$2u\cdot 2v\cdot 2w = 8uvw$$

BIVILLKORET ATT P.-E. SKA LIGGA PÅ ELLIPSOIDEN KAN SKRIVAS

$$g(u,v,w)=0 \qquad \text{DÅR} \qquad g(x,y,z)=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2-1$$

PROBLEMET ÄR SÅLEDES:

MAXIMERA $f(x,y,z)=8xyz$ DÅ $g(x,y,z)=0$, $x,y,z>0$.

DEN ALLMÄNA VERSIONEN AV SATS 1 (S. 179) KAN TILLÄMPAS, D.V.S.

SÖK (x,y,z) S.A.

$$\begin{cases}\nabla f(x,y,z)=\lambda\cdot\nabla g(x,y,z), & \lambda\in\mathbb{R}\\ g(x,y,z)=0, & x>0,\ y>0,\ z>0\end{cases}$$

DETTA GER

$$8yz=\lambda\cdot\frac{2x}{a^2},\qquad 8xz=\lambda\cdot\frac{2y}{b^2},\qquad 8xy=\lambda\cdot\frac{2z}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4xyz}{\lambda}=\frac{x^2}{a^2},\qquad \frac{4xyz}{\lambda}=\frac{y^2}{b^2},\qquad \frac{4xyz}{\lambda}=\frac{z^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=t$$

VILLKORET $g(x,y,z)=0$ GER

$$t+t+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases}x^2=a^2/3\\ y^2=b^2/3\\ z^2=c^2/3\end{cases}$$

SÅLEDES BLIR DEN MAXIMALA VOLYMEN

$$f\left(\frac{a}{\sqrt3},\frac{b}{\sqrt3},\frac{c}{\sqrt3}\right)=\frac{8abc}{3\sqrt3}$$

(OBS! $\left(\frac{a}{\sqrt3},\frac{b}{\sqrt3},\frac{c}{\sqrt3}\right)$ KAN EJ VARA EN MINPUNKT TY P.-E. KAN FÅ HUR LITEN VOLYM SOM HELST GENOM ATT LÅTA $u\to0, v\to0$, T.EX.)

SVAR: MAX VOLYM ÄR $\frac{8abc}{3\sqrt3}$.

$\boxed{4.32}$ MAXIMERA $f(x,y,z) = x+y+z$ PÅ SKÄRNINGEN AV YTORNA

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2 & (i) \\ x^2+y^2-z = 0 & (ii) \end{cases}$$

BESTÄM SKÄRNINGEN, D.V.S. DE PUNKTER DÄR (i) OCH (ii) GÄLLER SAMTIDIGT:

$$x^2+y^2+z^2-(x^2+y^2-z) = 2-0$$

$$z^2+z = 2$$

$$\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = 2+\frac{1}{4}$$

$$z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow z = 1 \text{ EL. } z=-2$$

LÖSN. $z=-2$ KAN EJ UPPFYLLA (ii) SÅ DEN FÖRKASTAS, D.V.S.

$z = 1$, $x^2+y^2 = 1$ (FRÅN (ii))

PÅ SKÄRNINGEN.

VI SKA NU MAXIMERA f UNDER DESSA VILLKOR, D.V.S:

MAXIMERA $f(x,y,1) = x+y+1$

DÅ $x^2+y^2 = 1$

LÅT $g(x,y) = x^2+y^2-1$. SÖK (x,y) S.A. $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \lambda \cdot 2x \\ 1 = \lambda \cdot 2y \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

VILLKORET $x^2+y^2=1$ GER $2x^2=1$, D.V.S. $x = \pm 1/\sqrt{2}$.

VÄRDET PÅ f DÅ $x = \pm 1/\sqrt{2} = y$ BLIR

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = \pm\frac{2}{\sqrt{2}}+1 = 1 \pm \sqrt{2}$$

VI SER ATT MAXIMUM GES AV $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = 1+\sqrt{2}$.

SVAR: STÖRSTA VÄRDET ÄR $1+\sqrt{2}$

SAMMANFATTNING – LEKTION 6

BEGREPP

- OPTIMERING MED ETT (s.172) ELLER FLERA (s.178) BIVILLKOR
- LAGRANGES MULTIPLIKATORMETOD (s. 174)

SATSER

- NÖDVÄNDIGA VILLKOR FÖR INRE PUNKTER OCH EXTREMVÄRDEN UNDER OPTIMERING MED BIVILLKOR:
  + SATS 1 (s.173): TVÅ DIM., ETT BIVILLKOR
  + VARIANT AV SATS 1 (s.177): n DIM., ETT BIVILLKOR
  + SATS 2 (s.179): n DIM., p BIVILLKOR

SE SPECIELLT EKV. (3') (s.174)

$$\text{grad } f = \lambda \cdot \text{grad } g \qquad \text{(LAGRANGES MULTIPLIKATORMETOD)}$$