

I1 VISA ATT: $\sum_{k=2}^n (k-1) \cdot k = \frac{n^3 - n}{3} \quad (*)$

FÖR $n=2, 3, 4, \dots$

BASFALL: OM $n=2$ DÅ

$$\left. \begin{aligned} V-L &= \sum_{k=2}^2 (k-1)k = 1 \cdot 2 = 2 \\ H-L &= \frac{2^3 - 2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \end{aligned} \right\} (*) \text{ GÄLLER DÅ } n=1$$

INDUKTIONSTEG: VISA ATT OM (*) GÄLLER ~~DA~~ FÖR $n=p$
DÅ FÖLJER DET ATT (*) OCKSÅ GÄLLER
 FÖR $n=p+1$.

FÖR ATT VISA INDUKTIONSTEGET SÅ ANTAR VI ATT

(*) GÄLLER FÖR $n=p$. MEN DÅ FÅR VI ATT:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{p+1} (k-1) \cdot k &= ((p+1)-1) \cdot (p+1) + \sum_{k=2}^p (k-1) \cdot k && \text{(SKIVN HÖGSTA TERMEN FÖR SIG)} \\ &= p \cdot (p+1) + \frac{p^3 - p}{3} && \text{(ENLIGT ANTAGANDET FÖR } n=p) \\ &= \frac{3p(p+1) + p^3 - p}{3} = \frac{p^3 + 3p^2 + 2p}{3} \\ &= \frac{p^3 + 3p^2 + 3p + 1 - (p+1)}{3} \\ &= \frac{(p+1)^3 - (p+1)}{3} && \text{(BINOMIALSATSEN)} \end{aligned}$$

VILKET VISAR ATT (*) ÄVEN GÄLLER FÖR $n=p+1$.

FRÅN BASFALLET VET VI ATT (*) GÄLLER FÖR $n=2$. NU TILLÄMPAR
 VI INDUKTIONSTEGET FÖR ATT SE ATT DÅ GÄLLER (*) ÄVEN FÖR
 $n=2+1=3$. UPPREPNING AV INDUKTIONSTEGET VISAR ATT (*)
 GÄLLER FÖR $n=3+1=4$ OCH VIDARE UPPREPNING VISAR ATT
 (*) GÄLLER FÖR $n=5, 6, 7, \dots$, D.V.S. (*) GÄLLER FÖR ALLA
 $n=2, 3, 4, \dots$ \square

I2 VISA ATT: $3^n \geq n \cdot 2^n$ (*)

FÖR $n=1, 2, 3, \dots$

INDUKTIONSTEG: VISA ATT OM (*) GÄLLER FÖR $n=m$
DÅ FÖLJER DET ATT (*) GÄLLER FÖR $n=m+1$.

FÖR ATT VISA DETTA ANTAR VI ATT (*) GÄLLER OM
VI SÄTTER $n=m$ I (*). ~~BÄ~~ FÖR ATT GÖRA BEVISET
LITE LÄTTARE SÅ VISAR VI ATT DETTA MEDFÖR ATT

$$(+)$$
 $\frac{3^{m+1}}{(m+1)2^{m+1}} \geq 1$ VILKET ÄR EKUIVALENT MED $3^{m+1} \geq (m+1)2^{m+1}$.

NU VISAR VI ATT (+) GÄLLER:

$$\begin{aligned} \frac{3^{m+1}}{(m+1) \cdot 2^{m+1}} &= \frac{3 \cdot 3^m}{(m+1) \cdot 2^{m+1}} \\ &\geq \frac{3 \cdot m \cdot 2^m}{(m+1) 2^{m+1}} && \text{(ENLIGT ANTAGANDET FÖR } n=m) \\ &= \frac{3 \cdot m}{2 \cdot (m+1)} \end{aligned}$$

VI KOMMER NU INTE LÄNGRE OM $m=1$, D.V.S. I DETTA FALL
FUNKERAR INTE INDUKTIONSTEGET. MEN, OM $m \geq 2$ SÅ GÅR DET
BRA, +7:

$$\frac{3^{m+1}}{(m+1)2^{m+1}} \geq \frac{3 \cdot m}{2 \cdot (m+1)} \geq \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot (2+1)} = \frac{6}{6} = 1$$

VI HAR ALLTSÅ BEVISAT FÖLJANDE UTSAGA:

(**) OM $3^m \geq m \cdot 2^m$ OCH $m \geq 2$ DÅ $3^{m+1} \geq (m+1) \cdot 2^{m+1}$

NU FÅR VI TVÅ BASFALL:

$$n=1: \left. \begin{array}{l} V-L = 3^1 = 3 \\ H-L = 1 \cdot 2^1 = 2 \end{array} \right\} 3 \geq 2 \quad \text{SÅ (*) OK DÅ } n=1$$

$$n=2: \left. \begin{array}{l} V-L = 3^2 = 9 \\ H-L = 2 \cdot 2^2 = 8 \end{array} \right\} 9 \geq 8 \quad \text{SÅ (*) OK DÅ } n=2$$

MEN NU KAN VI SE ATT (*) MÅSTE GÄLLA
FÖR ALLA n , TY:

OM $n=3$ DÅ KAN VI TILLÄMPA (**), FÖR ATT
~~ÄR~~ OM $m=2$ SÅ MEDFÖR (**) ATT (*) GÄLLER
FÖR ~~MEKAN~~ $n=m+1=2+1=3$. OM VI TILLÄMPAR (**)
IGEN SER VI ATT (*) GÄLLER FÖR $n=3+1=4$,
UPPREPAD TILLÄMPNING AV (**) VISAR ATT (*) GÄLLER
FÖR $n=5, 6, 7, \dots$ O.S.V.

MEG ANDRA ORD: (*) GÄLLER FÖR ALLA $n=1, 2, 3, \dots$. \square

I3 VISA $5^n - 1$ ÄR JÄMT DELBART MED 4 FÖR $n=1,2,3,\dots$

OBS! $5^n - 1$ ÄR JÄMT DELBART MED 4 OM OCH ENDAST OM VI KAN SKRIVA $5^n - 1 = 4 \cdot m$ FÖR NÅGOT Heltal m (SOM BEROR PÅ n).

BASFALL: OM $n=1$ SÅ $5^1 - 1 = 4 = 4 \cdot 1$ SÅ $5^1 - 1$ ÄR DELBART MED 4.

INDUKTIONSTEG: ANTAG ATT $5^p - 1 = 4 \cdot m$, DÅ

$$\begin{aligned}5^{p+1} - 1 &= 5^p \cdot 5 - 1 \text{ ~~ANVÄND~~} \\ &= (4m+1) \cdot 5 - 1 \\ &= 4 \cdot 5 \cdot m + 5 - 1 \\ &= 4 \cdot 5m + 4 \\ &= 4 \cdot (5m+1)\end{aligned}$$

VILKET VISAR ATT ÄVEN $5^{p+1} - 1$ ÄR DELBART MED 4.

INDUKTIONSPRINCIPEN MEDFÖR ATT $5^n - 1$ ÄR JÄMT DELBART MED 4 FÖR $n=1,2,3,\dots$ \square

I4

VISA ATT: $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2, (*)$

FÖR $n=1,2,3,\dots$

(ENLIGT FORMELN FÖR ARITMETISK SUMMA SÅ ÄR H-L:)

$$\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

BASFALL: OM $n=1$ SÅ

$$\left. \begin{aligned} V-L &= \sum_{k=1}^1 k^3 = 1 \\ H-L &= \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} = 1 \end{aligned} \right\} (*) \text{ OK FÖR } n=1$$

INDUKTIONSTEG: ANTAG ATT (*) GÄLLER FÖR $n=p$, DÅ

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} k^3 &= (p+1)^3 + \sum_{k=1}^p k^3 \\ &= (p+1)^3 + \frac{p^2(p+1)^2}{4} \quad (\text{ENLIGT ANTAGANDET FÖR } n=p) \\ &= \frac{4(p+1)^3 + p^2(p+1)^2}{4} \\ &= \frac{(p+1)^2 \cdot (4(p+1) + p^2)}{4} = \frac{(p+1)^2 \cdot (p^2 + 4p + 4)}{4} \\ &= \frac{(p+1)^2 \cdot (p+2)^2}{4} = \frac{(p+1)^2 \cdot ((p+1)+1)^2}{4} \end{aligned}$$

VILKET VISAR ATT (*) ÄVEN GÄLLER FÖR $n=p+1$.

ENLIGT INDUKTIONSPRINCIPEN GÄLLER SÄLEDES (*) FÖR $n=1,2,3,\dots$ \square
