$\boxed{2.2}$ $z = 1-2i$, $w = 3-i$

a) $3z - 2w = 3-6i - (6-2i) = -3-4i$

b) $z \cdot \overline{2w} = z \cdot 2 \cdot \overline{w} = 2 \cdot (1-2i) \cdot \overline{(3-i)} = 2 \cdot (1-2i) \cdot (3+i)$

$= 2 \cdot (3+i-6i-2i^2) = 2 \cdot (3-5i+2) = 2 \cdot (5-5i)$

$= 10(1-i)$

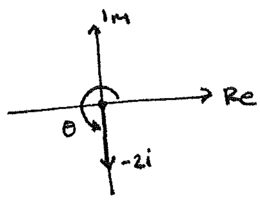
c) $\frac{1}{|z|^2} \cdot \frac{\overline{w}}{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \frac{\overline{w} \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{w} \cdot \overline{z}}{|z|^2 \cdot |z|^2} = (*)$

$\overline{w} \cdot \overline{z} = (3+i)(1+2i) = 3+6i+i+2i^2 = 3+7i-2 = 1+7i$

$|z|^2 = 1^2 + (-2)^2 = 1+4 = 5$

$(*) = \frac{1+7i}{5 \cdot 5} = \frac{1+7i}{25}$

$\boxed{2.7}$ LÖS EKVATIONEN



a) $z^2 = -2i$

SKRIV $-2i$ PÅ POLÄR FORM:

$$-2i = 2\cdot(-i) = 2\cdot e^{i\theta} = 2\cdot e^{i3\pi/2}$$

LÅT $z = r\cdot e^{i\varphi}$ SÅ $z^2 = r^2 e^{2i\varphi}$. VI FÅR ATT

$$(z^2=)\ r^2 e^{2i\varphi} = 2\cdot e^{i3\pi/2} \quad (= -2i)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = (\pm)\sqrt{2} \\ \varphi = \frac{3\pi}{4} + \pi k \end{cases}$$

TESTA VILKA VINKLAR SOM ÄR MÖJLIGA

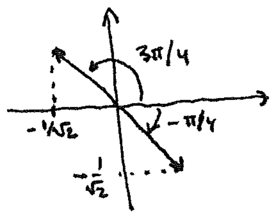
$$\frac{3\pi}{4},\quad \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4},\quad \frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4},\ \ldots$$

OBS! ATT $e^{i7\pi/4} = e^{-i\pi/4}$ (exp ÄR $2\pi i$ - PERIODISK) SÅ VI FÅR TVÅ MÖJLIGA LÖSNINGAR:

$$\varphi = \frac{3\pi}{4},\quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

SVAR: $z = r\cdot e^{i\varphi}$, DÄR $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ EL. $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

SVARET KAN OMVANDLAS TILL REKTANGULÄR FORM:



$$e^{i3\pi/4} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e^{-i\cdot\pi/4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}\cdot e^{i3\pi/4} = -1+i$$

$$\sqrt{2}\cdot e^{-i\pi/4} = 1-i$$

SVAR: $z = -1+i$ EL. $z = 1-i$.

2.8 LÖS EKVATIONEN

b) $z^2-(2+2i)z-3+6i=0$

KVADRATKOMPLETTERA:

$$\left(z-\frac{2+2i}{2}\right)^2-\Big(\underbrace{\frac{2+2i}{2}}_{=1+i}\Big)^2-3+6i=(z-1-i)^2-(\underbrace{1+2i+i^2}_{=2i})-3+6i$$

$$=(z-1-i)^2-3+4i$$

LÅT $w=z-1-i$, VILKET GER EKVATIONEN

$$w^2-3+4i=0$$

ANSÄTT $w=a+bi$ SÅ $w^2=a^2-b^2+2abi$. LÖS EKVATIONEN FÖR REALDEL OCH IMAGINÄRDEL SEPARAT:

$$\begin{cases} a^2-b^2-3=0 & \text{(REAL)} \\ 2ab+4=0 & \text{(IMAGINÄR)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2-3=0 \\ b=-\frac{2}{a} & (a\neq 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-\frac{4}{a^2}-3=0 \\ b=-\frac{2}{a} & (a\neq 0) \end{cases}$$

$$a^4-4-3a^2=0 \overset{c=a^2}{\Rightarrow} c^2-3c-4=0 \Rightarrow \left(c-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-4=0$$

$$\Rightarrow c=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2} \Rightarrow c=4 \text{ EL. } c=-1$$

VI KAN UTESLUTA DEN NEGATIVA ROTEN TY $c=a^2\geq 0$ EFTERSOM ATT a ÄR REELLT. D.V.S.

$$a=\pm 2,\quad b=-\frac{2}{a}=\mp 1 \Rightarrow z=w+1+i=\begin{cases} 2-i+1+i=3 \\ -2+i+1+i=-1+2i \end{cases}$$

SVAR: $z=3$ EL. $z=-1+2i$

EKVATIONERNA FÖR a OCH b KAN SNABBARE LÖSAS GENOM ATT ANVÄNDA ATT

$$|w^2|^2=|3+4i|^2 \Rightarrow |w|^4=3^2+4^2 \Rightarrow |a+bi|^4=25 \Rightarrow |a+bi|^2=5$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=5$$

TILLSAMMANS MED $a^2-b^2=3$ FÅR MAN ATT

$$2a^2=5+3 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$$

OCH b KAN LÖSAS UT SOM TIDIGARE ...

$\boxed{2.11}$ UTTRYCK PÅ POLÄR FORM

b) $z = \sqrt{3} - i$

I POLÄR FORM $z = r \cdot e^{i\theta}$ SÅ ÄR $r = |z|$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

SÅ BRYT UT $|z|$ FRÅN z:

$$z = \sqrt{3} - i = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = 2 \cdot e^{i\theta} = 2 \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$$

DETTA GER

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\theta = -\frac{1}{2}$$ ~~ÄM~~

EN LÖSNING TILL DESSA EKVATIONER ÄR $\theta = -\frac{\pi}{6}$, D.V.S:

SVAR: $z = 2 \cdot e^{-i \cdot \pi/6}$

c) $z = \dfrac{1-i}{1+\sqrt{3} \cdot i}$

BETRAKTA TÄLJARE OCH NÄMNARE VAR FÖR SIG (OM MAN FÖRSÖKER SKRIVA OM z UTAN KOMPLEX NÄMNARE FÖRST SÅ BLIR DET SVÅRT — TESTA SJÄLV!):

$$1 - i = \underbrace{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}_{=2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \left(= \sqrt{2} \cdot (\cos\theta + i \sin\theta) \right)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \cdot e^{-i\pi/4}$$

$$1 + \sqrt{3} \cdot i = \underbrace{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}}_{=4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3} \right) = 2 \cdot e^{i\pi/3}$$

DETTA GER

$$z = \frac{\sqrt{2} \cdot e^{-i\pi/4}}{2 \cdot e^{i\pi/3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \exp\left\{ i \cdot \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) \right\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left\{ i \cdot \left(-\frac{3\pi + 4\pi}{3 \cdot 4} \right) \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \exp\left\{ -i \cdot \frac{7\pi}{12} \right\}$$

SVAR: $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-i\pi \cdot 7/12}$

$\boxed{2.12}$ SKRIV PÅ REKTANGULÄR FORM

d) $z = e^{i5\pi/6}$

VI MÅSTE SKRIVA OM VINKELN SOM EN SUMMA AV "KÄNDA" VINKLAR (0, π/3, π/4, π/6, ...). OBS ATT

$$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$$

SÅ

$$z = e^{i(\pi-\pi/6)} = e^{i\pi}\cdot e^{-i\pi/6} =$$

$$= \left(\cos\pi + i\cdot\sin\pi\right)\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= (-1+i\cdot 0)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

SVAR: $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$\boxed{2.13}$ LÖS EKVATIONEN

c) $z^6 = 1+i$

ANVÄND POLÄR FORM, $z = r \cdot e^{i\theta}$

$$1+i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$$

EKVATIONEN ÖVERGÅR TILL

$$r^6 \cdot e^{i6\theta} = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^6 = \sqrt{2} \\ 6\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2^{1/12} \\ \theta = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3} \cdot k \end{cases}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{24}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi + 8\pi}{24} = \frac{9\pi}{24} = \frac{3\pi}{8}$$

$$\theta_3 = \frac{\pi}{24} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi - 8\pi}{24} = -\frac{7\pi}{24}$$

$$\theta_4 = \frac{\pi}{24} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi + 16\pi}{24} = \frac{17\pi}{24}$$

$$\theta_5 = \frac{\pi}{24} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi - 16\pi}{24} = -\frac{15\pi}{24} = -\frac{5\pi}{8}$$

$$\theta_6 = \frac{\pi}{24} + \frac{3\pi}{3} = \frac{\pi + 24\pi}{24} = \frac{25\pi}{24}$$

EN 6:E GRADS EKVATION HAR 6 RÖTTER SÅ VI HAR NU HITTAT ALLA RÖTTER.

SVAR: $z = 2^{1/12} \cdot e^{i\theta_k}$, $k = 1, \dots, 6$, θ_k SOM OVAN.

3.1 LÖS EKVATIONEN

a) $z^4 + 2iz^2 + 3 = 0$

OBS: ENDAST JÄMNA EXPONENTER. PRÖVA ATT ANSÄTTA $w = z^2$:

$$w^2 + 2iw + 3 = 0$$

VI KAN GISSA EN LÖSNING $w = i$

$$i^2 + 2i \cdot i + 3 = -1 - 2 + 3 = 0 \quad \text{OK!}$$

ALLTSÅ ÄR $(w-i)$ EN FAKTOR I $w^2 + 2iw + 3$, D.V.S.

$$w^2 + 2iw + 3 = (w-i)\cdot(\cancel{A}w + b) = \cancel{A}w^2 + (b-i)w - ib$$

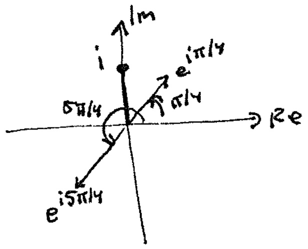
$$\Rightarrow \begin{cases} b - i = 2i \\ -ib = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3i \\ (b = 3i) \end{cases}$$

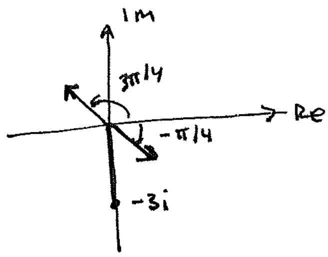
$$w^2 + 2iw + 3 = (w-i)\cdot(w+3i) = 0$$

LÖS NU UT z, VARJE FAKTOR GER ~~...~~ EN EKVATION:

$z^2 - i = 0 \Rightarrow z^2 = i \Rightarrow z = e^{i\pi/4}$ EL. $z = e^{i5\pi/4}$

$z^2 + 3i = 0 \Rightarrow z^2 = -3i \Rightarrow z = \sqrt{3}\cdot e^{i3\pi/4}$ EL. $z = \sqrt{3}\cdot e^{-i\cdot\pi/4}$





SVAR: $z = e^{i\pi/4}$, $z = e^{i5\pi/4}$, $z = \sqrt{3}\cdot e^{i3\pi/4}$, $z = \sqrt{3}\cdot e^{-i\pi/4}$

$\boxed{3.9}$ BESTÄM $a \in \mathbb{C}$ SÅ ATT $z=i$ ÄR EN ROT OCH LÖS EKV.

$$z^3 - (1+i)z^2 + (4+3i)z + a = 0$$

BESTÄM a GENOM ATT SÄTTA IN $z=i$ OCH VÄLJ a SÅ ATT HL=0:

$$i^3 - (1+i)i^2 + (4+3i)i + a = 0$$

$$\Rightarrow -a = -i + 1 + i + 4i - 3 = -2 + 4i \qquad \Rightarrow \boxed{a = 2-4i}$$

NU VET VI ATT $z-i$ ÄR EN FAKTOR, SÅ:

$$z^3 - (1+i)z^2 + (4+3i)z + 2 - 4i = (z-i)\cdot(z^2 + bz + c)$$

$$= z^3 + (b-i)z^2 + (c-ib)z - ic$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b - i = -(1+i) \\ c - ib = 4+3i \\ -ic = 2-4i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 4+2i \\ (c = 2i+4) \end{cases}$$

SÖK RÖTTER TILL $z^2 - z + 4 + 2i$. KVADRATKOMPLETTERA:

$$z^2 - z + 4 + 2i = \left(z - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} + 4 + 2i = \left(z - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{15}{4} + 2i$$

LÅT $w = z - \frac{1}{2}$, $w = x + iy$ OCH SÖK RÖTTER

$$(x+iy)^2 = -\tfrac{15}{4} - 2i \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 + i2xy = -\tfrac{15}{4} - 2i \quad \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{15}{4} & (i) \\ xy = -1 & (ii) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + y^2 = \left|-\tfrac{15}{4} - 2i\right| = \sqrt{\left(\tfrac{15}{4}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\tfrac{15^2 + 4\cdot 16}{16}} = \tfrac{17}{4} \quad (iii)$$

$$(i)+(iii) \Rightarrow \quad 2x^2 = -\tfrac{15}{4} + \tfrac{17}{4} = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow x^2 = \tfrac{1}{4} \quad \Rightarrow x = \pm\tfrac{1}{2}$$

$$(ii) \Rightarrow \quad y = -\tfrac{1}{x} = \mp 2$$

$$w = z - \tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{1}{2} \mp 2i \quad \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2i = 1 - 2i \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2i = 2i \end{cases}$$

SVAR: $a = 2 - 4i$, RÖTTER: $z = i$, $z = 1 - 2i$, $z = 2i$

$\boxed{3.14}$ LÖS EKV. GIVET ATT EN ROT ÄR RENT IMAGINÄR

$$z^4 + 3z^3 + z^2 + 18z - 30 = 0$$

ANSÄTT ATT EN ROT $z = t \cdot i$ $(t \in \mathbb{R})$ OCH FÖRSÖK LÖSA UT t:

$$(ti)^4 + 3(ti)^3 + (ti)^2 + 18ti - 30 = 0$$
$$t^4 - 3t^3 i - t^2 + 18ti - 30 = 0$$
$$t^2(t^2-1) + 3ti(6-t^2) - 30 = 0$$

DEN IMAGINÄRA DELEN MÅSTE VARA NOLL SÅ $6 - t^2 = 0$, D.V.S $t = \pm\sqrt{6}$. DETTA GER TVÅ RÖTTER

$$z = \pm\sqrt{6} \cdot i$$

DETTA BETYDER ATT $(z+\sqrt{6}\cdot i)$ OCH $(z-\sqrt{6}\cdot i)$ ÄR FAKTORER I VÅRAT URSPRUNGLIGA POLYNOM:

$$z^4 + 3z^3 + z^2 + 18z - 30 = (z+\sqrt{6}\cdot i)(z-\sqrt{6}\cdot i)\cdot p(z)$$

FÖR ATT BESTÄMMA p SÅ DELAR VI VL MED

$$(z+\sqrt{6}i)(z-\sqrt{6}i) = z^2 + 6$$

$$\begin{array}{r|l} & z^2+3z-5 \\ \hline z^2+6 & z^4+3z^3+z^2+18z-30 \\ & -(z^4+6z^2) \\ \hline & 3z^3-5z^2+18z-30 \\ & -(3z^3+18z) \\ \hline & -5z^2-30 \\ & -(-5z^2-30) \\ \hline & 0 \end{array} \implies p(z) = z^2+3z-5$$

SÖK SLUTLIGEN NOLLSTÄLLEN TILL $p(z)$:

$$z^2+3z-5 = 0 \implies \left(z+\tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} - 5 = 0 \implies z = -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{29}{4}}$$

SVAR: $z = \pm\sqrt{6}\cdot i$, $z = \dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$