$\boxed{1.3}$ LÅT $x \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$. VISA ATT

$$(*) \qquad 1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

FÖR ALLA $n = 1, 2, 3, \ldots$.

VI KAN LÄTT TESTA OM (*) GÄLLER FÖR NÅGRA VÄRDEN FÖR n:

$n=1$: $\quad VL = 1$, $\quad HL = \dfrac{1-x}{1-x} = 1 \quad$ ok

$n=2$: $\quad VL = 1+x$, $\quad HL = \dfrac{1-x^2}{1-x} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1+x \quad$ ok

OSV. POÄNGEN MED INDUKTION ÄR ATT VISA ATT (*) GÄLLER FÖR ALLA VAL AV n. SJÄLVA IDEN ÄR VISA ATT OM (*) GÄLLER FÖR NÅGOT $n=p$ SÅ MÅSTE (*) OCKSÅ GÄLLA FÖR $n=p+1$.

ALLTSÅ, ANTAG ATT (*) ÄR SANN FÖR $n=p$ (NÅGOT p, INTE ALLA p). DÅ KAN VI SE VAD VL (AV (*)) BLIR FÖR $n=p+1$:

$$n=p+1: \quad \underbrace{1 + x + \cdots + x^{p-1}}_{\text{ANVÄND ATT (*) GÄLLER FÖR } n=p} + x^p = \frac{1-x^p}{1-x} + x^p$$

$$= \frac{1-x^p + (1-x)x^p}{1-x} = \frac{1-x^{p+1}}{1-x}$$

DETTA VISAR ATT (*) ÄR SANN ÄVEN FÖR $n=p+1$.

(**) { D.V.S. OM (*) SANN FÖR NÅGOT p, SÅ FÖLJER DET ATT (*) ÄR SANN ÄVEN FÖR $p+1$.

NU KAN VI ANVÄNDA DETTA RESULTAT: VI HAR KOLLAT ATT (*) GÄLLER FÖR $n=1$ SÅ (**) MEDFÖR ATT (*) GÄLLER FÖR $n=2$. EFTERSOM ATT (*) GÄLLER FÖR $n=2$, SÅ MEDFÖR (**) ATT (*) GÄLLER FÖR $n=3$. OSV. MED ANDRA ORD SÅ MÅSTE (*) GÄLLA FÖR ALLA $n = 1, 2, 3, \ldots$.
