$\boxed{\begin{matrix}1.3\\14\end{matrix}}$ ÄR $\bar{b}$ EN LINJÄRKOMBINATION AV KOLONNERNA I A?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

LÅT $A = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3]$. KAN VI HITTA x_1, x_2, x_3 SÅ ATT

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{b} \ ?$$

SKRIV OM SOM SEPARATA EKV.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 6x_3 &= 11 \\ 3x_2 + 7x_3 &= -5 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

D.V.S. $\bar{b}$ ÄR EN LINJÄRKOMBINATION AV KOLONNERNA I A OM OCH ENDAST OM ~~LÖSA~~ OVANSTÅENDE EKVATIONSSYSTEM:

VI KA

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 11 \\ 0 & 3 & 7 & -5 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 11 \\ 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

ENLIGT SATS 2, S. 24, SÅ HAR DETTA SYSTEM (ÅTMINSTONE) EN LÖSNING SÅ...

SVAR: JA, $\bar{b}$ ÄR EN LINJÄRKOMBINATION AV KOLONNERNA I A.

1.3
18

FÖR VILKA VÄRDEN PÅ h LIGGER $\bar{y}$ I DET LINJÄRA HÖLJET TILL $\bar{v}_1$ OCH $\bar{v}_2$?

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

D.V.S. BESTÄM NÄR $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 = \bar{y}$ HAR LÖSNING:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -3+2h \end{bmatrix}$$

DE TVÅ SISTA RADERNA GER

$$\begin{cases} x_2 = -5 \\ 2x_2 = -3+2h \end{cases} \Longrightarrow 2\cdot(-5) = -3+2h \Rightarrow h = -\frac{7}{2}$$

OM $h = -\frac{7}{2}$ SÅ FÅR VI SYSTEMET

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -7/2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -7/2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

OCH DETTA SYSTEM HAR (EXAKT) EN LÖSNING. (SATS 2, S. 24)

OM $h \neq -7/2$ SÅ SKULLE SISTA RADEN HA ETT NOLLSKILT ELEMENT I TREDJE KOLONNEN, VILKET INNEBÄR ATT LÖSNING SAKNAS (SAMMA SATS).

D.V.S. $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 = \bar{y}$ HAR LÖSNING $\Longleftrightarrow h = -7/2$.

SVAR: $h = -7/2$

1.4
17

a) HUR MÅNGA RADER I A HAR ETT PIVÅELEMENT?

b) HAR EKVATIONEN $A\bar{x}=\bar{b}$ EN LÖSNING FÖR ALLA VAL AV $\bar{b}$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & -6 & 3 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

DE INRINGADE ELEMENTEN ÄR PIVÅELEMENT (ALLA ELEMENT TILL VÄNSTER ÄR NOLLOR, MEN PIVÅELEMENTET SJÄLV ÄR NOLLSKILT).

D.V.S. DET FINNS TRE RADER MED PIVÅELEMENT.

EFTERSOM ATT EN RAD SAKNAR PIVÅELEMENT SÅ GER SATS 4, S.43, ATT $A\bar{x}=\bar{b}$ SAKNAR LÖSNING FÖR ÅTMINSTONE ETT VAL AV $\bar{b}$.

SVAR: a) 3

b) NEJ

1.4
22

SPÄNNER $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ UPP HELA $\mathbb{R}^3$?

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

BILDA MATRISEN $A = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3]$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \\ -2 & 8 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

VI SER ATT A HAR PIVÅELEMENT I ALLA RADER SÅ SATS 4, S.43, GER ATT $\text{Span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} = \mathbb{R}^3$.

SVAR: JA

1.5
4

HAR FÖLJANDE (HOMOGENA) SYSTEM EN ICKE-TRIVIAL LÖSNING?

$$-5x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$$

LÖS SYSTEMET:

$$\begin{bmatrix} -5 & 7 & 9 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 39 & 0 \end{bmatrix}$$

VI SER ATT x_3 ÄR EN FRI VARIABEL OCH SATS 2, S.24, SÄGER ATT ICKE-TRIVIA LÖSNING FINNS $\Leftrightarrow$ SYSTEMET HAR FRI VARIABEL.

SVAR: JA

1.5
22

PARAMETERFORM FÖR EN LINJE SOM GÅR MELLAN $\overline{p}$ OCH $\overline{q}$ GES T.EX. AV

$$\overline{x} = \overline{p} + t \cdot (\overline{q} - \overline{p}) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

TY $t=0$ GER $\overline{x} = \overline{p}$, $t=1$ GER $\overline{x} = \overline{p} + \overline{q} - \overline{p} = \overline{q}$, OCH EKVATIONEN BESKRIVER EN LINJE DÄRFÖR ATT DEN ÄR LINJÄR OCH HAR (EXAKT) EN FRI VARIABEL.

OM $\overline{p} = (-6,3)$, $\overline{q} = (0,-4)$ SÅ

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0+6 \\ -4-3 \end{bmatrix}$$

SVAR: $\overline{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}$

1.5
16

BESKRIV LÖSNINGARNA TILL FÖLJANDE SYSTEM PÅ PARAMETERFORM, JÄMFÖR MED MOTSVARANDE HOMOGENA SYSTEM FRÅN UPPGIFT 6.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 &= -6 \end{aligned}$$

LÖS SYSTEMET

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D.V.S

$$x_1 = -5 - 4x_3$$
$$x_2 = 3 + 3x_3$$
$$x_3 \text{ FRI } \quad (x_3 = x_3)$$

(KONTROLL: $(-5-4x_3) + 3(3+3x_3) - 5x_3 = 4$ OK
$(-5-4x_3) + 4(3+3x_3) - 8x_3 = 7$ OK
$-3(-5-4x_3) - 7(3+3x_3) + 9x_3 = -6$ OK)

SKRIV PÅ VEKTORFORM

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-4x_3 \\ 3+3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{p} + x_3 \cdot \bar{v}$$

LÖSER MAN DET HOMOGENA SYSTEMET FÅR MAN

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D.V.S.

$$\bar{x}_h = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \bar{v}$$

GEOMETRISKT SETT ÄR DEN HOMOGENA LÖSNINGEN $\bar{x}_h$ EN RÄT LINJE GENOM ORIGO MED RIKTNING $\bar{v} = (-4, 3, 1)$. LÖSNINGEN TILL DET URSPRUNGLIGA SYSTEMET ÄR SAMMA LINJE FAST FÖRSKJUTEN MED $\bar{p} = (-5, 3, 0)$.

SVAR: $\bar{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

1.7 14 FÖR VILKA VÄRDEN PÅ h ÄR $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ LINJÄRT BEROENDE?

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$$

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ LINJÄRT BEROENDE $\Longleftrightarrow$ $A\bar{x} = 0$ HAR ICKE-TRIVIAL LÖSNING
$A = [\bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{v}_3]$

LÖS SYSTEMET

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & h & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & h+3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h+10 & 0 \end{bmatrix}$$

SYSTEMET HAR EN FRI VARIABEL $\Longleftrightarrow$ $h+10=0$

D.V.S. $A\bar{x}=0$ HAR ICKE-TRIVIAL LÖSNING $\Longleftrightarrow$ $h=-10$

SVAR: $h=-10$

---

2 SVAR: OBEROENDE, TY $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & -8 & 1 \end{bmatrix}$ HAR 3 PIVÅRADER SÅ $A\bar{x}=0$ HAR EXAKT EN LÖSNING (SATS 2, S.24) D.V.S. $\bar{x}=(0,0,0)$ (DEN TRIVIALA LÖSN.)

---

6 SVAR: OBEROENDE, TY

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & -9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

SOM ENDAST HAR DEN TRIVIALA LÖSNINGEN $\bar{x}=(0,0,0)$

---

8 SVAR: BEROENDE, TY MATRISEN HAR FLER KOLONNER ÄN RADER.

---

18 SVAR: BEROENDE (MER KOLONNER ÄN RADER)

---

20 SVAR: BEROENDE, TY NOLLVEKTORN INGÅR.