1.8

$\boxed{2}$

$$T(\bar{u}) = A\bar{u} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$T(\bar{v}) = A\bar{v} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a/2 \\ b/2 \\ c/2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & -5 & -9 \end{bmatrix}}_{A}\ \underbrace{\begin{matrix} 6 \\ -7 \\ -9 \end{matrix}}_{\bar{b}} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 4 & -15 & -27 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \xcancel{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -15 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

D.V.S. $A\bar{x} = \bar{b} \iff \bar{x} = (-5, -3, 1)$ D.V.S. <u>UNIK</u> LÖSNING.

$$\left(\text{KONTROLL: } \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & -5 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+9+2 \\ -3-4 \\ -15+15-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ -9 \end{bmatrix} \quad \text{OK!} \right)$$

SVAR: $\bar{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, LÖSNINGEN ÄR UNIK.

$\boxed{10}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D.V.S. $A\bar{x} = 0$ HAR LÖSNINGARNA

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad x_3 \text{ FRI}$$

$$\left(\text{KONTROLL: } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_3 - 6x_3 + 9x_3 \\ -3x_3 + 3x_3 \\ -2x_3 + 2x_3 \\ 6x_3 - 6x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{OK} \right)$$

(1.8)

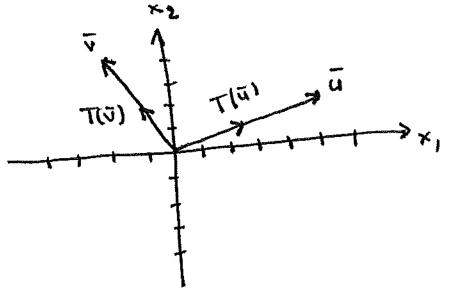
12

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

DEN SISTA RADEN GER $0 \cdot x_4 = 17$, VILKET ÄR OMÖJLIGT. D.V.S. $\bar{b} = (-1, 3, -1, 4)$ LIGGER <u>EJ</u> I VÄRDEMÄNGDEN TILL $\bar{x} \mapsto A\bar{x}$.

---

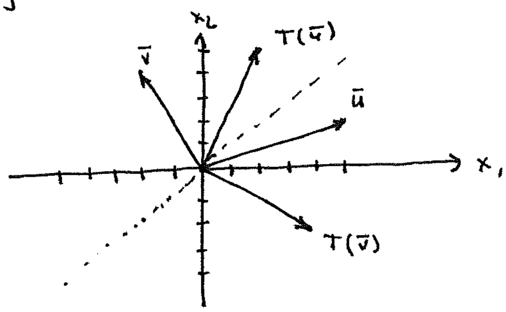
14 $\quad T(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T(\bar{u}) = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\bar{v}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$



(LÄNGDEN PÅ VEKTORER HALVERAS)

---

16 $\quad T(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T(\bar{u}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad T(\bar{v}) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$



(REFLEKTION I $x_1 = x_2$)

---

17 $\quad T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ LINJÄR, $\quad T(\underbrace{5,2}_{\bar{u}}) = (2,1), \quad T(\underbrace{1,3}_{\bar{v}}) = (-1,3)$

LINEARITET GER

$$T(3\bar{u}) = 3 \cdot T(\bar{u}) = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T(2\bar{v}) = 2 \cdot T(\bar{v}) = 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$T(3\bar{u} + 2\bar{v}) = 3 \cdot T(\bar{u}) + 2 \cdot T(\bar{v}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

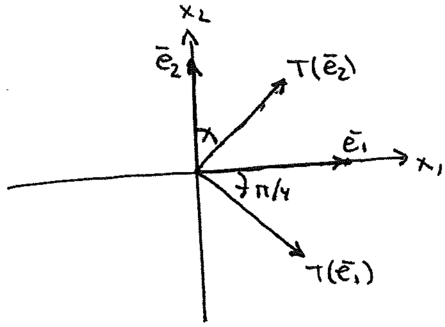
1.9

2 $T(\bar{x}) = A\bar{x} \implies A = [T(\bar{e}_1) \;\; T(\bar{e}_2) \;\; T(\bar{e}_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

---

4 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ROTATION $-\pi/4$ RADIANER. ANGE A $(T(\bar{x}) = A\bar{x})$.

$A = [T(\bar{e}_1) \;\; T(\bar{e}_2)]$ (TY T LINJÄR)



$$T(\bar{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$T(\bar{e}_2) = \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(TEST OM SVARET ÄR RIMLIGT: OM $\bar{u} = T(\bar{e}_2)$ SÅ BORDE $T(\bar{u}) = \bar{e}_1$, D.V.S. ATT ROTERA $\bar{e}_2$ $-\frac{\pi}{4}$ RADIANER TVÅ GÅNGER BORDE GE $\bar{e}_1$

$$T(\bar{u}) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{e}_1 \quad \text{OK!}$$)

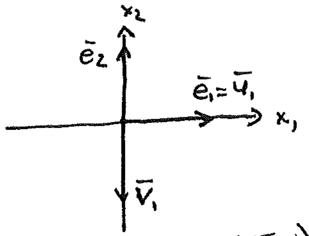
---

6 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\bar{e}_1 \mapsto \bar{e}_1$, $\bar{e}_2 \mapsto \bar{e}_2 + 3\bar{e}_1$

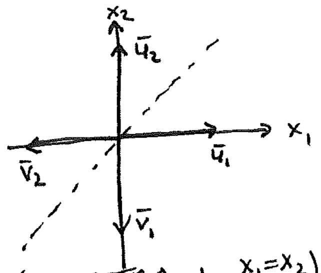
$T(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\bar{e}_2) = \bar{e}_2 + 3\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \implies A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.9

8 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ REFLEKTERA I X_1-AXELN, SEDAN I LINJEN $X_1 = X_2$.



(REFLEKTERA I X_1-AXELN)

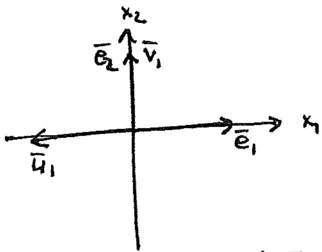


(REFLEKTERA I $X_1=X_2$)

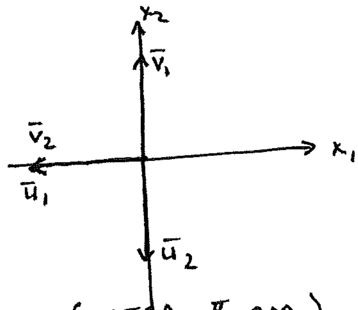
$$\left.\begin{array}{l} \bar{e}_1 \mapsto \bar{u}_1 \mapsto \bar{u}_2 = \bar{e}_2 \\ \bar{e}_2 \mapsto \bar{v}_1 \mapsto \bar{v}_2 = -\bar{e}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = [\bar{e}_2 \ \ -\bar{e}_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

---

10 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ REFLEKTERA I X_2-AXELN, DÄREFTER ROTERA $\frac{\pi}{2}$ RADIANER



(REFLEKTERA I X_2-AXELN)



(ROTERA $\frac{\pi}{2}$ RAD.)

$$\left.\begin{array}{l} \bar{e}_1 \mapsto \bar{u}_1 \mapsto \bar{u}_2 = -\bar{e}_2 \\ \bar{e}_2 \mapsto \bar{v}_1 \mapsto \bar{v}_2 = -\bar{e}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = [-\bar{e}_2 \ \ -\bar{e}_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.9

$\boxed{29}$ $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ÄR LINJÄR. HUR SER TRAPPSTEGSFORMEN AV DESS STANDARDMATRIS A UT OM T ÄR INJEKTIV?

1) A ÄR EN 4×3 MATRIS (4 RADER, 3 KOLONNER)

2) T INJEKTIV $\Longleftrightarrow$ A:S KOLONNER ÄR LINJÄRT OBEROENDE

$\Longleftrightarrow$ INGA FRIA VARIABLER

D.V.S. DET MÅSTE FINNAS TRE PIVÅ~~EL~~ELEMENT OCH ENDA ~~SÄTTET~~ SÄTT DET KAN SKE PÅ ÄR:

$$A = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \blacksquare & \text{NOLLSKILT ELEMENT} \\ * & \text{GODTYCKLIGT ELEMENT} \end{pmatrix}$$

$\boxed{30}$ $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ SAMMA SOM OVAN FAST BYT UT "INJEKTIV" MOT "SURJEKTIV".

1) A ÄR EN 3×4 MATRIS

2) T SURJEKTIV $\Longleftrightarrow$ A:S KOLONNER SPÄNNER UPP $\mathbb{R}^3$

D.V.S. DET MÅSTE FINNAS 3 PIVÅELEMENT. DETTA KAN SKE PÅ TRE SÄTT:

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$$
