3.3

ANVÄND CRAMERS FORMEL FÖR ATT LÖSA

(2)

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 6 \\ 5x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases} \qquad \left(A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right)$$

$$x_1 = \frac{\det A_1(\bar{b})}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12-7}{8-5} = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(\bar{b})}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{3} = \frac{28-30}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\left(\text{KONTROLL: } \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} 20-2 \\ 25-4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 18 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \bar{b} \text{ ok!} \right)$$

SVAR: $\bar{x} = \frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

ANVÄND CRAMERS FORMEL FÖR ATT LÖSA

(6)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases} \qquad \left(A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\det A_1(\bar{b}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(6+4)-(8-2) = -16$$

$$\det A_2(\bar{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 10 + 14 + 3\cdot 6 = 52$$

$$\det A_3(\bar{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-8 = -4$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9-5 = 4$$

$$x_1 = \frac{-16}{4} = -4, \quad x_2 = \frac{52}{4} = 13, \quad x_3 = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\left(\text{KONTROLL: } A(-4,13,-1) = (-8+13-1,\ 4-2,\ -12+13-3) = (4,2,-2) \text{ ok!} \right)$$

SVAR: $\bar{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 13 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3.3

10

BESTÄM PARAMETERN S S.A.

$$\begin{cases} 2s \cdot x_1 + x_2 = 1 \\ 3s \cdot x_1 + 6s \cdot x_2 = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2s & 1 \\ 3s & 6s \end{bmatrix}$$

HAR ENTYDIG LÖSNING.

A ÄR KVADRATISK SÅ ENTYDIG LÖSN. FINNS $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$.

$$\det A = 2s \cdot 6s - 3s = 12s^2 - 3s = 3s(4s-1)$$

SÖK NOLLSTÄLLEN:

$$3s(4s-1) = 0 \Longleftrightarrow s = 0 \text{ EL. } 4s-1 = 0$$

D.V.S. $\det A = 0 \Longleftrightarrow s = 0$ EL. $s = 1/4$

SVAR: ENTYDIG LÖSN. FINNS EXAKT DÅ $s \notin \{0, 1/4\}$.

$\boxed{3.3}$ BESTÄM adj A OCH A^{-1} OM:

(12)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\boxed{\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}}$$

KONTROLL:

$$A \cdot (\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5 \cdot I \quad \text{ok!} \quad \det A = 5$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{5} \text{adj } A}$$

---

(16)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = +14, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

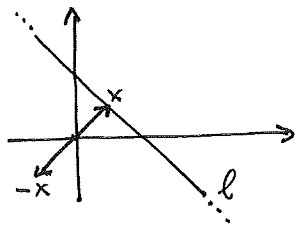
$$\boxed{\text{adj } A = \begin{bmatrix} -9 & -6 & 14 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}$$

KONTROLL:

$$A \cdot (\text{adj } A) = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} = -9 \cdot I \quad \text{OK!} \quad \det A = -9$$

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{9} \cdot (\text{adj } A)}$$

4.1

(4) 

OM LINJEN ℓ EJ GÅR GENOM ORIGO SÅ GÄLLER ATT: OM X PÅ ℓ SÅ ÄR −X EJ PÅ ℓ.

---

(6) ÄR $X = \{ p(t) = a + t^2 : a \in \mathbb{R} \}$ ETT DELRUM TILL $\mathbb{P}_n$?

NEJ! ~~OM~~ T.EX. SÅ HAR VI ATT

(*) $b \cdot (a + t^2) = ab + bt^2$

EJ I X OM $b \neq 1$ (TY KONSTANTEN FRAMFÖR t^2 MÅSTE VARA =1 OM POLYNOMET (*) SKA VARA I X.)

---

(7) ÄR $X = \{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 : a_k \in \mathbb{Z} \}$ ETT DELRUM TILL $\mathbb{P}_n$?

NEJ! $\mathbb{P}_n$ ÄR ETT VEKTORRUM ÖVER $\mathbb{R}$ SÅ X ÄR EJ SLUTEN VID MULTIPLIKATION AV SKALÄRER. D.V.S. OM $p(t) \in X$ OCH $b \in \mathbb{R}$ MEN b EJ ETT HELTAL, DÅ ÄR $b \cdot p(t) \notin X$.

---

(11) $W = \{ (5b + 2c, b, c) : b, c \in \mathbb{R} \}$. BESTÄM $\bar{u}, \bar{v}$ S.A. $W = \text{Span}\{\bar{u}, \bar{v}\}$.

$$\begin{bmatrix} 5b + 2c \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

VI KAN ALLTSÅ VÄLJA $\bar{u} = (5, 1, 0)$, $\bar{v} = (2, 0, 1)$.

EFTERSOM ATT $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^3$ SÅ ÄR $\text{Span}\{\bar{u}, \bar{v}\}$ ETT DELRUM TILL $\mathbb{R}^3$ ENLIGT SATS 1 (KAP. 4.1).

4.1

13

$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

a) ÄR $\bar{w}$ I $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$? NEJ, $\bar{w} \neq \bar{v}_1$, $\bar{w} \neq \bar{v}_2$, $\bar{w} \neq \bar{v}_3$

HUR MÅNGA VEKTORER ÄR I $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$? 3 ST.

b) HUR MÅNGA VEKTORER ÄR I Span $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$? OÄNDLIGT MÅNGA.

c) LIGGER $\bar{w}$ I Span $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$?

SÖK x_1, x_2, x_3 S.A. $\bar{w} = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3$

OBS ATT $2 \cdot \bar{v}_2 = \bar{v}_3$ SÅ ~~MAN~~ OM DETTA ÄR MÖJLIGT KAN VI

VÄLJA $x_3 = 0$. SÖK x_1, x_2 S.A.

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\implies x_1 = 3 - 2x_2 = 3 - 2 = 1$$

KONTROLL ATT $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ ÄR GILTIG LÖSNING:

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \bar{w} \qquad \text{OK!}$$

D.V.S. JA, $\bar{w} \in$ Span $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$.

16

$W = \{(-a+1, a-6b, 2b+a) : a, b \in \mathbb{R}\}$. BESTÄM VEKTORER SOM SPÄNNER UPP W, ELLER VISA ATT W EJ ÄR ETT VEKTORRUM.

$$\begin{bmatrix} -a+1 \\ a-6b \\ 2b+a \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

OBS ATT W EJ ÄR VEKTORRUM TY $0 \notin W$:

$$a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies a = 1 \quad (\text{TY } -a + b \cdot 0 + 1 = 0)$$

$\left.\begin{matrix} 1 - 6b = 0 \\ 1 + 2b = 0 \end{matrix}\right\}$ GÅR EJ ATT UPPFYLLA SAMTIDIGT.

4.2

(2) LIGGER $\bar{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ I NUL A OM $A = \begin{bmatrix} 5 & 21 & 19 \\ 13 & 23 & 2 \\ 8 & 14 & 1 \end{bmatrix}$?

$$A\bar{w} = \begin{bmatrix} 5\cdot 5 - 21\cdot 3 + 19\cdot 2 \\ 13\cdot 5 - 23\cdot 3 + 2\cdot 2 \\ 8\cdot 5 - 14\cdot 3 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \bar{w} \in \text{Nul } A$$

SVAR: JA!

---

(6) SÖK VEKTORER SOM SPÄNNER UPP NUL A OM

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SÖK ALLA LÖSNINGAR TILL $A\bar{x} = 0$:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3, x_4, x_5 \text{ FRIA} \\ x_1 = -6x_3 + 8x_4 - x_5 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \end{cases}$$

LÅT $a, b, c \in \mathbb{R}$, DÅ GER OVANSTÅENDE ATT ALLA LÖSNINGAR TILL $A\bar{x} = 0$ GES AV:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -6a + 8b - c \\ 2a - b \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =: a \cdot \bar{u} + b \cdot \bar{v} + c \cdot \bar{w}$$

SVAR: $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ SPÄNNER UPP NUL A.

(KONTROLL: $A\bar{u} = \begin{bmatrix} -6+10-4 \\ 2-2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, $A\bar{v} = \begin{bmatrix} 8-5-3 \\ -1+1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, $A\bar{w} = \begin{bmatrix} -1+1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$)

4.2

ÄR $W = \{ (a,b,c,d) : \overset{=c}{a+3b}, b+c+a = d \}$ ETT VEKTORRUM ?

(10) VILLKOREN KAN SKRIVAS SOM

$$\begin{cases} c = a+3b \\ d = a+b+(a+3b) = 2a+4b \end{cases}$$

D.V.S. $W = \{ A\bar{x} : \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \}$ DÄR

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

SÅ W ÄR BILDRUMMET TILL DEN LINJÄRA AVBILDNINGEN $\bar{x} \mapsto A\bar{x}$. ENLIGT SATS 3 (SE PARAGRAFEN EFTER SATSEN) SÅ ÄR W ETT VEKTORRUM.

SVAR: JA

---

(16) SÖK A S.A. $\text{Col } A = \{ (b-c, 2b+c+d, 5c-4d, d) : b,c,d \in \mathbb{R} \}$.

$$\begin{bmatrix} b-c \\ 2b+c+d \\ 5c-4d \\ d \end{bmatrix} = b \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} =: A \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

SVAR: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

~~(20)~~ VILKEN DIMENSION HAR Nul A OCH Col A OM $A = [1\ -3\ 9\ 0\ -5]$?

OBS! DETTA ÄR EJ FRÅGAN SOM STÄLLS I BOKEN!

A ÄR PÅ REDUCERAD TRAPPSTEGSFORM SÅ VI UTLÄSER

$A\bar{x} = 0 \iff x_1 = 3x_2 - 9x_3 + 0 \cdot x_4 + 5x_5$

D.V.S. $x_2, \ldots, x_5$ ÄR FRIA VARIABLER SÅ Nul A HAR DIM. 4.

$\text{Col } A = \text{Span}\{+1, -3, 9, 0, -5\} = \text{Span}\{1\}$ SÅ Col A HAR DIM. 1.

SVAR: 4 OCH 1

---

(20) SVAR: $\text{Nul } A \subset \mathbb{R}^5$, $\text{Col } A \subset \mathbb{R}^1$. ((a) $k=5$ (b) $k=1$)

4.2

23 LIGGER $\bar{w}$ I Col A ? Nul A ?

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

~~KOM~~ $\bar{w} \in \text{Col } A \iff \exists \bar{x} : A\bar{x} = \bar{w}$

LÖS EKV. SYS.

$$\begin{bmatrix} -6 & 12 & 2 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \text{ FRI} \\ x_1 = -\frac{1}{3} + 2x_2 \end{cases}$$

D.V.S $\bar{w} \in \text{Col } A$ (EFTERSOM ATT SYSTEMET HAR LÖSNING.)

KOLLA OM $\bar{w} \in \text{Nul } A$:

$$A\bar{w} = \begin{bmatrix} -6 \cdot 2 + 12 \cdot 1 \\ -3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SVAR : $\bar{w}$ LIGGER BÅDE I Col A OCH Nul A.