4.7

(6) LÅT $D = \{\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3\}$ OCH $F = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ VARA BASER FÖR V. ANTAG ATT

$$\bar{f}_1 = 2\bar{d}_1 - \bar{d}_2 + \bar{d}_3, \quad \bar{f}_2 = 3\bar{d}_2 + \bar{d}_3, \quad \bar{f}_3 = -3\bar{d}_1 + 2\bar{d}_3.$$

a) BESTÄM MATRISEN SOM BYTER BAS FRÅN F TILL D.

ENLIGT SATS 15 (KAP. 4.7) SÅ GES MATRISEN AV

$$M = \left[\, [\bar{f}_1]_D \;\; [\bar{f}_2]_D \;\; [\bar{f}_3]_D \,\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) BESTÄM $[\bar{x}]_D$ OM $\bar{x} = \bar{f}_1 - 2\bar{f}_2 + 2\bar{f}_3$

ENLIGT DEFINITION HAR VI ATT

$$[\bar{x}]_D = M[\bar{x}]_F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

---

(10) BESTÄM BASBYTESMATRISERNA $B \to C$ OCH $C \to B$ FÖR

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad C = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

VI VET ATT $P_B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ BYTER FRÅN B-KOORD. TILL STANDARDKOORD. OCH $P_C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ BYTER FRÅN C-KOORD. TILL STANDARDKOORD.

SÅLEDES BYTER $P_C^{-1}P_B$ BAS ~~FRÅN~~ $B \to$ STANDARD $\to C$

OCH $P_B^{-1}P_C$ BYTER BAS $C \to$ STANDARD $\to B$.

$$P_B^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$P_C^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(SE LÄNGST NED PÅ S. 274 FÖR ETT ANNAT SÄTT ATT LÖSA UPPGIFTEN)

BASBYTE $B \to C$:

$$P_C^{-1}P_B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 24 & 9 \\ -15 & -6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}}}$$

BASBYTE $C \to B$:

$$P_B^{-1}P_C = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 15 & 24 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}}}$$

4.7 I $\mathbb{P}_2$ BESTÄM BASBYTESMATRISEN FRÅN BASEN

(14) $B = \{1-3t^2,\ 2+t-5t^2,\ 1+2t\}$

TILL STANDARDBASEN ($= \{1, t, t^2\}$). SKRIV t^2 SOM LINJÄRKOMBINATION AV POLYNOMEN I B.

I STANDARDBASEN HAR VEKTORERNA I B KOORDINATERNA

$$\{(1,0,-3),\ (2,1,-5),\ (1,2,0)\}$$

SÅLEDES GES BASBYTESMATRISEN AV

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

KOORDINATERNA FÖR t^2 I STANDARDBASEN ÄR $\bar{x} = (0,0,1)$, SÅ B-KOORDINATERNA GES AV LÖSNINGEN TILL

$$M[\bar{x}]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

LÖS SYSTEMET:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & +3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & +1 \end{bmatrix}$$

D.V.S. $[\bar{x}]_B = (3, -2, +1)$

SVAR: $t^2 = 3(1-3t^2) - 2(2+t-5t^2) + 1\cdot(1+2t)$

(KONTROLL: $3(1-3t^2)-2(2+t-5t^2)+(1+2t) = 3-9t^2-4-2t+10t^2+1+2t = t^2$ OK!)