5.1

(2) ÄR $\lambda=2$ ETT EGENVÄRDE TILL $A=\begin{bmatrix}7&3\\3&-1\end{bmatrix}$?

SÖK $\bar{x}$ S.A. $A\bar{x}=\lambda\bar{x}$:

$$A\bar{x}=\lambda\bar{x} \iff A\bar{x}-\lambda\bar{x}=0 \iff (A-\lambda I)\bar{x}=0$$

LÅT $\lambda=-2$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}7&3\\3&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&0\\0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&3\\3&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}9&3\\3&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3&1\\0&0\end{bmatrix}$$

D.V.S. $3x_1+x_2=0$ ÄR LÖSN. TILL $(A-(-2)I)\bar{x}=0$.

EFTERSOM ATT ICKE-TRIVIALA LÖSN. EXISTERAR SÅ ÄR $\lambda=-2$ ETT EGENVÄRDE.

SVAR: JA! (T.EX. $A\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}=-2\cdot\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$)

(KONTROLL: $\begin{bmatrix}7&3\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7-9\\3+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\6\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$ OK!)

---

(6) ÄR $\bar{v}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ EN EGENVEKTOR TILL $A=\begin{bmatrix}3&6&7\\3&3&7\\5&6&5\end{bmatrix}$? VAD ÄR EGENVÄRDET ISÅFALL?

$$A\bar{v}=\begin{bmatrix}3-12+7\\3-6+7\\5-12+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\\-2\end{bmatrix}=-2\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=-2\cdot\bar{v}$$

SVAR: JA! EGENVÄRDE $\lambda=-2$.

$\boxed{5.1}$

(8) ÄR $\lambda = 3$ ETT EGENVÄRDE TILL $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$? HITTA EN EGENVEKTOR ISÅFALL.

SÖK ICKE-TRIVIAL LÖSN. TILL $A\bar{x} = \lambda \bar{x}$, D.V.S. $(A - \lambda I)\bar{x} = 0$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

DET FINNS EN FRI VARIABEL SÅ ICKE-TRIVIAL LÖSN. FINNS, D.V.S. $\lambda = 3$ ÄR ETT EGENVÄRDE. ALLA LÖSN. TILL $(A - 3I)\bar{x} = 0$ GES AV

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 3x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

SÅ EN EGENVEKTOR ÄR $(3, 2, 1)$.

<u>SVAR</u>: $\lambda = 3$ ÄR EGENVÄRDE, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ÄR EN EGENVEKTOR.

(KONTROLL: $A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4+2 \\ 9-4+1 \\ 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. OK!)

5.2

(8) BESTÄM KARAKTERISTISKA POLYNOMET OCH EGENVÄRDEN TILL

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

KARAKTERISTISKA EKV. ÄR $\det(A-\lambda I)=0$:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(3-\lambda) - (-2)\cdot 2 = \lambda^2 - 10\lambda + 25 =: p(\lambda) \quad \text{(KAR. POLY.)}$$

EGENVÄRDEN GES AV $p(\lambda)=0$:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda-5)^2 = 0 \iff \lambda = 5$$

D.V.S. $\lambda = 5$ ÄR DET ENDA EGENVÄRDET OCH DET HAR MULTIPLICITET 2.

SVAR: $\begin{cases} \text{KAR. POLY.: } p(\lambda) = (\lambda-5)^2 \\ \text{EGENVÄRDE: } \lambda = 5 \end{cases}$

---

(14) BESTÄM KARAKTERISTISKA POLYNOMET TILL

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 6 & 7 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(5-\lambda)(-2-\lambda) - 18\right]$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 28)$$

SVAR: $p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-28)$

5.2 FÖR VILKA VÄRDEN PÅ h ÄR EGENRUMMET TILL $\lambda = 5$ TVÅDIMENSIONELLT?

(18)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OBS FÖRST ATT A ÄR TRIANGULÄR SÅ EGENVÄRDENA GES AV DIAGONALELEMENTEN, D.V.S. $\lambda = 5$ ÄR EGENVÄRDE MED MULTIPLICITET 2.

EGENRUMMET TILL $\lambda = 5$ GES AV ALLA LÖSN. TILL $(A - 5I)\bar{x} = 0$:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 1/2 \\ 0 & -2 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 1/2 \\ 0 & 0 & h-6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

VI SER ATT x_1 AUTOMATISKT ÄR EN FRI VARIABEL OCH x_3 ÄR FRI OMM $h - 6 = 0$ (x_2 OCH x_4 ÄR EJ FRIA). D.V.S. OM $h \neq 6$ SÅ ÄR EGENRUMMET ENDIMENSIONELLT (EN FRI VAR.) OCH OM $h = 6$ SÅ ÄR EGENRUMMET TVÅDIMENSIONELLT (TVÅ FRIA VAR.).

SVAR: $h = 6$

$\boxed{5.3}$

(2) LÅT $A = PDP^{-1}$. BERÄKNA A^4.

~~AKH~~ $P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

OBS: $A^4 = (PDP^{-1})^4 = (PD\underbrace{P^{-1})(P}_{I}D\underbrace{P^{-1})(P}_{I}D\underbrace{P^{-1})(P}_{I}DP^{-1})$

$= PD^4P^{-1}$

$D^4 = \begin{bmatrix} 1^4 & 0 \\ 0 & (1/2)^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{bmatrix}$

$P^{-1} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{1} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$A^4 = PD^4P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3/16 & 1/8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 - 9/16 & 6 - 3/8 \\ -15 + 15/16 & -9 + 5/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151/16 & 45/8 \\ -15^2/16 & -67/8 \end{bmatrix}$

SVAR: $A^4 = \begin{bmatrix} 151/16 & 45/8 \\ -225/16 & -67/8 \end{bmatrix}$

---

(8) DIAGONALISERA MATRISEN $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ OM DET GÅR.

SATS 7 (b) SÄGER ATT A ÄR DIAGONALISERBAR OMM A HAR TVÅ LIND. OBER. EGENVEKTORER. OBS ATT A ÄR DIAGONAL SÅ EGENVÄRDENA GES AV DIAGONAL ELEMENTEN. D.V.S. $\lambda = 5$ ÄR ENDA EGENVÄRDET. EGENRUMMET GES AV LÖSN. TILL $(A - 5I)\bar{x} = 0$

$A - 5I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

D.V.S. x_1 ÄR FRI, MEN INTE x_2. SÅ EGENRUMMET ÄR ENDIMENSIONELLT SÅ DET KAN EJ FINNAS TVÅ LIND. OBER. EGENVEKTORER.

SVAR: A KAN EJ DIAGONALISERAS!

$\boxed{5.4}$ LÅT $T(\bar{x}) = A\bar{x}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$. HITTA EN BAS $\mathcal{B}$ S.A. $[T]_{\mathcal{B}}$

(14) ÄR DIAGONAL.

DIAGONALISERA A! LÖS EGENVÄRDEN

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -7 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda) - 21 = \lambda^2 - 6\lambda - 16$$

$$= (\lambda - 3)^2 - 25 \quad =: p(\lambda)$$

$$p(\lambda) = 0 \iff (\lambda - 3) = \pm\sqrt{25} \iff \lambda = 3 \pm 5$$

EGENVÄRDEN ÄR $\lambda = -2$, $\lambda = 8$. SÖK EGENRUM:

$$A - (-2)I = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + 2I)\bar{x} = 0 \implies \bar{x} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} 3/7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

D.V.S. EGENRUMMET TILL $\lambda = -2$ SPÄNNS UPP AV $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$A - 8I = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -7 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - 8I)\bar{x} = 0 \implies \bar{x} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

D.V.S. EGENRUMMET TILL $\lambda = 8$ SPÄNNS UPP AV $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

SÅLEDES GÄLLER ATT $A = PDP^{-1}$ DÄR

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

MED ANDRA ORD: OM $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ SÅ GES MATRISEN FÖR T RELATIVT BASEN $\mathcal{B}$ AV D.

5.4

(2) LÅT $D = \{\bar{d}_1, \bar{d}_2\}$, $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ VARA BASER FÖR V RESPEKTIVE W.
LÅT $T: V \to W$ VARA EN LINJÄR TRANSFORMATION S.A.

$$T(\bar{d}_1) = 2\bar{b}_1 - 3\bar{b}_2, \quad T(\bar{d}_2) = -4\bar{b}_1 + 5\bar{b}_2$$

BESTÄM MATRISEN FÖR T RELATIVT D OCH B.

ENLIGT (4) PÅ S.328 GES MATRISEN AV

$$M = \left[\, [T(\bar{d}_1)]_B \ \ [T(\bar{d}_2)]_B \,\right] = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

SVAR: $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

---

(6) LÅT $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_4$ VARA AVBILDNINGEN SOM AVBILDAR $\bar{p}(t)$ PÅ $\bar{p}(t) + t^2\bar{p}(t)$.

a) VAD ÄR BILDEN AV $\bar{p}(t) = 2 - t + t^2$?

$$T(2-t+t^2) = (2-t+t^2) + t^2(2-t+t^2) = \underline{2 - t + 3t^2 - t^3 + t^4}$$

b) VISA ATT T ÄR LINJÄR.

LÅT $\bar{p}, \bar{q} \in \mathbb{P}_2$, $a, b \in \mathbb{R}$, DÅ

$$\begin{aligned} T(a\cdot\bar{p}(t) + b\cdot\bar{q}(t)) &= (a\cdot\bar{p}(t) + b\cdot\bar{q}(t)) + t^2(a\bar{p}(t) + b\cdot\bar{q}(t)) \\ &= a\cdot(\bar{p}(t) + t^2\bar{p}(t)) + b\cdot(\bar{q}(t) + t^2\bar{q}(t)) \\ &= a\cdot T(\bar{p}(t)) + b\cdot T(\bar{q}(t)) \end{aligned}$$

VILKET VISAR ATT T ÄR LINJÄR.

c) BESTÄM MATRISEN SOM REPRESENTERAR T I STANDARDBASERNA FÖR $\mathbb{P}_2$ OCH $\mathbb{P}_4$.

BERÄKNA T:S VERKAN PÅ BASEN $\{1, t, t^2\}$ FÖR $\mathbb{P}_2$:

$$T(1) = 1 + t^2, \quad T(t) = t + t^3, \quad T(t^2) = t^2 + t^4$$

KOORDINATERNA FÖR DESSA VEKT I $\mathbb{P}_4$ ÄR

$$\bar{v}_1 = (1,0,1,0,0), \quad \bar{v}_2 = (0,1,0,1,0), \quad \bar{v}_3 = (0,0,1,0,1)$$

SÅ MATRISEN ÄR $M = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3]$.

SVAR: $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.3

(12)

DIAGONALISERA $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ GIVET ATT EGENVÄRDENA ÄR 2, 8.

SUMMAN AV EGENRUMMENS DIM. MÅSTE VARA 3 OM A SKALL VARA DIAGONALISERBAR. SÖK EGENRUM:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 OCH x_3 ÄR FRIA SÅ $\lambda = 2$ HAR ETT TVÅDIMENSIONELLT EGENRUM SOM GES AV $x_1 = -x_2 - x_3$ (ENL. OVAN):

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

D.V.S. $\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$ ÄR BAS TILL $\lambda = 2$:S EGENRUM.

$$A - 8I = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D.V.S. x_3 FRI OCH $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

SÅ $\{(1,1,1)\}$ ÄR EN BAS FÖR EGENRUMMET TILL $\lambda = 8$.

VI SER ATT A ÄR DIAGONALISERBAR, $A = PDP^{-1}$ MED

SVAR: $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

KONTROLL:

$$AP = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 8 \\ +2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

OK!