6.1

(2)

$$\bar{w} \cdot \bar{w} = [3 \ -1 \ -5] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} = 3 \cdot 3 + (-1)\cdot(-1) + (-5)\cdot(-5) = 9 + 1 + 25 = \underline{\underline{35}}$$

$$\bar{x} \cdot \bar{w} = [6 \ -2 \ 3] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} = 6\cdot 3 + (-2)\cdot(-1) + 3\cdot(-5) = 18 + 2 - 15 = \underline{\underline{5}}$$

$$\frac{\bar{x} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} = \frac{35}{5} = \underline{\underline{7}}$$

---

(8)

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \underline{\underline{7}} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

---

(10)

BESTÄM ENHETSVEKTOR FÖR DEN GIVNA RIKTNINGEN : $\bar{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

ENHETSVEKTOR GES AV $\bar{v} / \|\bar{v}\|$ $\left(\text{TY: } \left\|\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}\right\| = \frac{1}{\|\bar{v}\|} \cdot \|\bar{v}\| = 1\right)$

$$\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{(-6)^2 + 4^2 + (-3)^2}} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{36 + 16 + 9}} \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{61}} \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}}}$$

---

(14)

BESTÄM AVSTÅNDET MELLAN $\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ OCH $\bar{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$.

AVSTÅNDET GES AV $\|\bar{u} - \bar{v}\|$:

$$\bar{u} - \bar{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\|\bar{u} - \bar{v}\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 16 + 36} = \sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17} = \underline{\underline{2\sqrt{17}}}$$

---

(16)

ÄR $\bar{u} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ OCH $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ ORTOGONALA?

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 12 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + (-5) \cdot 3 = 24 - 9 - 15 = 0$$

SVAR: <u>JA</u>

$\boxed{6.2}$

ÄR $\{\bar{u},\bar{v},\bar{w}\}$ ORTOGONALA OM

(2) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\bar{w} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$?

$\bar{u}\cdot\bar{v} = 1\cdot 0 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot 2 = 0$ (ORTOGONALA)

$\bar{u}\cdot\bar{w} = 1\cdot(-5) + (-2)\cdot(-2) + 1\cdot 1 = 0$ (— " —)

$\bar{v}\cdot\bar{w} = 0\cdot(-5) + 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 = 0$ (— " —)

SVAR: JA

---

(6) SAMMA FRÅGA FÖR

$\bar{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\bar{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\bar{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = 5\cdot(-4) + (-4)\cdot 1 + 0\cdot(-3) + 3\cdot 8 = -20 - 4 + 24 = 0$ (ORTOGONALA)

$\bar{u}\cdot\bar{w} = 5\cdot 3 + (-4)\cdot 3 + 0\cdot 5 + 3\cdot(-1) = 15 - 12 - 3 = 0$ (— " —)

$\bar{v}\cdot\bar{w} = (-4)\cdot 3 + 1\cdot 3 + (-3)\cdot 5 + 8\cdot(-1) = -12 + 3 - 15 - 8 = -32$ (EJ ORTOGONALA)

SVAR: NEJ; $\{\bar{u},\bar{v},\bar{w}\}$ ÄR INTE ORTOGONALA

---

(8) VISA ATT $\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}$ ÄR EN ORTOGONAL BAS FÖR $\mathbb{R}^2$ OCH SKRIV $\bar{x}$ SOM EN LINJÄRKOMBINATION AV $\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}$ OM

$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\bar{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\bar{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\bar{u}_1\cdot\bar{u}_2 = 3\cdot(-2) + 1\cdot 6 = 0$

SÅ $\bar{u}_1 \perp \bar{u}_2$. DETTA MEDFÖR ATT $\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}$ ÄR LINJÄRT OBEROENDE SÅ DE SPÄNNER UPP $\mathbb{R}^2$ OCH ÄR DÄRMED OCKSÅ EN BAS FÖR $\mathbb{R}^2$.

EFTERSOM ATT $\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}$ ÄR ORTOGONALA HAR VI ATT

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}\cdot\bar{u}_1}{\bar{u}_1\cdot\bar{u}_1}\bar{u}_1 + \frac{\bar{x}\cdot\bar{u}_2}{\bar{u}_2\cdot\bar{u}_2}\bar{u}_2 = \frac{-6\cdot 3 + 3\cdot 1}{3^2+1^2}\bar{u}_1 + \frac{-6\cdot(-2)+3\cdot 6}{(-2)^2+6^2}\bar{u}_2$$

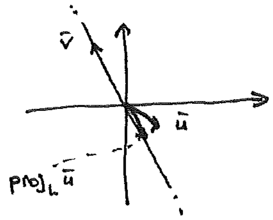
$$= \frac{-15}{10}\bar{u}_1 + \frac{30}{40}\bar{u}_2 = -\frac{3}{2}\bar{u}_1 + \frac{3}{4}\bar{u}_2$$

SVAR: $\bar{x} = -\frac{3}{2}\bar{u}_1 + \frac{3}{4}\bar{u}_2$

(KONTROLL: $-\frac{3}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{4}\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -18-6 \\ -6+18 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -24 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$ OK!)

6.2

(12) BERÄKNA ORTOGONALPROJEKTIONEN AV $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ PÅ LINJEN L GENOM ORIGO OCH $\bar{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.



PROJEKTIONEN GES AV

$$\text{proj}_L \bar{u} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{v} \cdot \bar{v}} \bar{v}$$

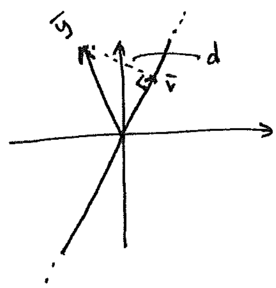
$$= \frac{1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3}{(-1)^2 + 3^2} \bar{v}$$

$$= \frac{-1-3}{1+9} \bar{v} = \frac{-4}{10} \bar{v} = -\frac{2}{5} \bar{v}$$

SVAR: $-\frac{2}{5}\bar{v}$

---

(16) BERÄKNA AVSTÅNDET FRÅN $\bar{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$ TILL LINJEN L GENOM $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ OCH ORIGO.



OM $\bar{v}$ ÄR ORTOGONALPROJ. AV $\bar{y}$ PÅ L

DÅ GES AVSTÅNDET AV:

$$d = \| \bar{y} - \bar{v} \|$$

BERÄKNA $\bar{v}$:

$$\bar{v} = \frac{\bar{y} \cdot \bar{u}}{\bar{u} \cdot \bar{u}} \bar{u} = \frac{-3 \cdot 1 + 9 \cdot 2}{1^2 + 2^2} \bar{u} = \frac{15}{5} \bar{u} = 3\bar{u}$$

VILKET GER

$$d = \| \bar{y} - \bar{v} \| = \| \bar{y} - 3\bar{u} \| = \| (-3 - 3 \cdot 1, \ 9 - 3 \cdot 2) \| = \| (-6, 3) \| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$$

SVAR: $d = 3\sqrt{5}$

6.3

(6) VISA ATT $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ ÄR ORTOGONALA OCH BERÄKNA ORTOGONALPROJEKTIONEN AV $\bar{y}$ PÅ $\text{Span}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ OM

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ÄR $\bar{u}_1 \perp \bar{u}_2$?

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = -4 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 \qquad \text{JA, } \bar{u}_1 \perp \bar{u}_2$$

ORTOGONALPROJ. PÅ $\text{Span}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ GES AV

$$\hat{y} = \frac{\bar{y} \cdot \bar{u}_1}{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1} \bar{u}_1 + \frac{\bar{y} \cdot \bar{u}_2}{\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2} \bar{u}_2 = \frac{6 \cdot (-4) + 4 \cdot (-1) + 1}{(-4)^2 + (-1)^2 + 1^2} \bar{u}_1 + \frac{6 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1}{0^2 + 1^2 + 1^2} \bar{u}_2$$

$$= \frac{-27}{18} \bar{u}_1 + \frac{5}{2} \bar{u}_2 = \underline{\underline{-\frac{3}{2} \bar{u}_1 + \frac{5}{2} \bar{u}_2}}$$

---

(8) $W = \text{Span}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$. BESTÄM $\bar{x}$ OCH $\hat{y}$ SÅ ATT $\bar{y} = \hat{y} + \bar{x}$ OM

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ÄR $\bar{u}_1 \perp \bar{u}_2$?

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = 0 \qquad \text{JA.}$$

BERÄKNA $\hat{y}$ (D.V.S. ORTOGONALPROJ. AV $\bar{y}$ PÅ W):

$$\hat{y} = \frac{\bar{y} \cdot \bar{u}_1}{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1} \bar{u}_1 + \frac{\bar{y} \cdot \bar{u}_2}{\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2} \bar{u}_2 = \frac{-1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{1^2 + 1^2 + 1^2} \bar{u}_1 + \frac{-1 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-2)}{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2} \bar{u}_2 = \frac{6}{3} \bar{u}_1 + \frac{7}{14} \bar{u}_2$$

NU KAN VI BERÄKNA $\bar{x}$ (TY $\bar{y} = \hat{y} + \bar{x}$):

$$\bar{x} = \bar{y} - \hat{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{6}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{7}{14} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 2 + 1/2 \\ 4 - 2 - 3/2 \\ 3 - 2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = \frac{6}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{7}{14} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 1/2 \\ 2 + 3/2 \\ 2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

SVAR: $\bar{y} = \hat{y} + \bar{x}$, $\hat{y} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\boxed{6.4}$ BESTÄM EN ORTOGONAL BAS FÖR $W = \text{Span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ OM

(4) $$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}$$

LÅT $\bar{u}_1 = \bar{v}_1$.

BERÄKNA $\bar{u}_2 = \bar{v}_2 - \text{proj}_{\bar{u}_1}(\bar{v}_2)$:

$$\bar{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix} - \frac{-3\cdot 3 + 14\cdot(-4) + (-7)\cdot 5}{3^2 + (-4)^2 + 5^2} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix} - \frac{-9 - 56 - 35}{9 + 16 + 25} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix} + \frac{100}{50} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 + 6 \\ 14 - 8 \\ -7 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(KONTROLL: $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 3\cdot 3 + (-4)\cdot 6 + 5\cdot 3 = 9 - 24 + 15 = 0$ OK!)

SVAR: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}$

---

(8) BESTÄM EN ON-BAS (ORTONORMERAD) FÖR W OVAN.

$\bar{u}_1 \perp \bar{u}_2$ SÅ VI BEHÖVER ENDAST NORMERA DEM

$$\bar{w}_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} \bar{u}_1 \; \cancel{\sqrt{6^2 + (-8)^2 + 10^2}\,\bar{u}_2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9 + 16 + 25}} \bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{50}} \bar{u}_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \bar{u}_1$$

$$\bar{w}_2 = \frac{\bar{u}_2}{\|\bar{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6^2 + (-8)^2 + 10^2}} \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{36 + 64 + 100}} \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{200}} \bar{u}_2 = \frac{1}{10\sqrt{2}} \bar{u}_2$$

SVAR: $\left\{ \frac{1}{5\sqrt{2}} \bar{u}_1, \frac{1}{10\sqrt{2}} \bar{u}_2 \right\}$ $\quad \left(\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 10 \end{bmatrix} \right)$

$\boxed{6.5}$ BESTÄM ORTOGONALPROJ. AV $\bar{b}$ PÅ Col A SAMT BERÄKNA MINSTAKVADRATLÖSN.

(10)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ORTOGONALPROJ.

$$\hat{b} = \frac{\bar{b}\cdot\bar{a}_1}{\|\bar{a}_1\|^2}\bar{a}_1 + \frac{\bar{b}\cdot\bar{a}_2}{\|\bar{a}_2\|^2}\bar{a}_2 = \frac{3+1+5}{3}\bar{a}_1 + \frac{6-4+10}{24}\bar{a}_2 = 3\bar{a}_1 + \frac{1}{2}\bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 3+1 \\ -3+2 \\ 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

MINSTAKVADRAT LÖSN. GES AV $A\hat{x} = \hat{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D.V.S.

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{6.5}$ ANVÄND MINSTAKVADRATMETODEN FÖR ATT LÖSA $A\bar{x} = \bar{b}$

(11)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

NORMALEKVATIONEN : $A^T A \bar{x} = A^T \bar{b}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+1 & -2-6-3 \\ -2-6-3 & 4+9+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{bmatrix}$$

$$A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+2-2 \\ 8-3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

LÖS NORMALEKVATIONEN

$$\begin{bmatrix} 6 & -11 & -4 \\ -11 & 22 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & -11 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -11 & -22 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

D.V.S. MINSTAKVADRATLÖSNINGEN ÄR $\hat{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

<u>SVAR</u>: $\hat{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

---

(6) BESTÄM MINSTAKVADRATLÖSN.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & 27 \\ 3 & 3 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 3 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MINSTAKVADRATLÖSN. GES ALLTSÅ AV:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 5 - x_3 \\ -1 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (x_3 \text{ FRI})$$

$\boxed{6.7}$ DEFINIERA $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ PÅ $\mathbb{P}_2$.

(4) BERÄKNA $\langle p, q\rangle$ OM $p(t) = 3t - t^2$, $q(t) = 3 + 2t^2$

$$\langle p, q\rangle = (-3-1)(3+2) + (0)\cdot 3 + (3-1)(3+2)$$
$$= -4\cdot 5 + 2\cdot 5 = -10$$

SVAR: $\langle p, q\rangle = -10$

---

(6) BERÄKNA $\|p\|$ OCH $\|q\|$ FÖR p, q SOM I (4).

$$\|p\|^2 = \langle p, p\rangle = (-3-1)^2 + 0^2 + (3-1)^2 = 16 + 4 = 20$$
$$\|q\|^2 = \langle q, q\rangle = (3+2)^2 + 3^2 + (3+2)^2 = 25 + 9 + 25 = 59$$
$$\Rightarrow \|p\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \quad \|q\| = \sqrt{59}$$

SVAR: $\begin{cases} \|p\| = 2\sqrt{5} \\ \|q\| = \sqrt{59} \end{cases}$

---

(8) BERÄKNA ORTOGONALPROJ. AV q PÅ DELRUMMET SOM SPÄNNS UPP AV p.
(p OCH q SOM I (4)).

LÅT $W = \operatorname{Span}\{p\}$. SÖKT: $\operatorname{proj}_W q = \frac{\langle q, p\rangle}{\langle p, p\rangle} p$

$$\operatorname{proj}_W q = \frac{-10}{20} p = -\frac{1}{2} p$$

SVAR: $-\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2$

6.7 DEFINIERA $\langle p,q\rangle = p(-3)q(-3)+p(-1)q(-1)+p(1)q(1)+p(3)q(3)$ PÅ $\mathbb{P}_3$.

(9) LÅT $p_0(t)=1$, $p_1(t)=t$, $p_2(t)=t^2$.

a) BERÄKNA ORTOGONALPROJ. AV p_2 PÅ $W=\mathrm{Span}\{p_0,p_1\}$:

$$r = \mathrm{proj}_W\, p_2 = \frac{\langle p_2,p_0\rangle}{\langle p_0,p_0\rangle}p_0 + \frac{\langle p_2,p_1\rangle}{\langle p_1,p_1\rangle}p_1$$

$$\langle p_2,p_0\rangle = (-3)^2\cdot 1 + (-1)^2\cdot 1 + (1)^2\cdot 1 + (3)^2\cdot 1 = 9+1+1+9 = 20$$

$$\langle p_0,p_0\rangle = 1+1+1+1 = 4$$

$$\langle p_2,p_1\rangle = (-3)^2(-3) + (-1)^2(-1) + 1^2\cdot 1 + 3^2\cdot 3 = -27-1+1+27 = 0$$

SVAR: $r(t)=5$

$$r(t) = \frac{20}{4}p_0(t) = 5p_0(t) = 5$$

b) BESTÄM $q\perp W$ S.A. $\{p_0,p_1,q\}$ ÄR EN ORTOGONAL BAS FÖR $\mathrm{Span}\{p_0,p_1,p_2\}$. SKALA ~~OM~~ q S.A. $(q(-3),q(-1),q(1),q(3))=(1,-1,-1,1)$.

OBS. ATT $p_0\perp p_1$ TY

$$\langle p_0,p_1\rangle = 1\cdot(-3)+1\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot 3 = 0$$

ENLIGT OVAN ÄR $\tilde{q} = p_2 - r$ ORTOGONAL MOT p_0 OCH p_1

$$\tilde{q}(t) = t^2-5$$

SKALA OM $\tilde{q}$ S.A. DET UPPFYLLER OVANSTÅENDE VILLKOR. LÅT $q = k\cdot\tilde{q}$ OCH BESTÄM k: ~~ANAL~~

$$1 = q(-3) = k\cdot\tilde{q}(-3) = k\cdot(9-5) = 4k \implies k = 1/4$$

D.V.S. $q(t) = \frac{1}{4}(t^2-5)$. KONTROLLERA ATT RESTERANDE VILLKOR ÄR UPPFYLLDA:

$q(-1) = \frac{1}{4}(1-5) = -1$ (OK), $q(1) = \frac{1}{4}(1-5) = -1$ (OK), $q(3) = \frac{1}{4}(9-5) = 1$ (OK)

SVAR: $q(t) = \frac{1}{4}(t^2-5)$.

---

(10) BESTÄM BÄSTA APPROXIMATIONEN AV t^3 I $\mathrm{Span}\{p_0,p_1,q\}$ MED BETECKNINGAR SOM I (9).

BÄSTA APPROX. GES AV PROJEKTION PÅ DELRUMMET:

$$\frac{\langle t^3,p_0\rangle}{\langle p_0,p_0\rangle}p_0 + \frac{\langle t^3,p_1\rangle}{\langle p_1,p_1\rangle}p_1 + \frac{\langle t^3,q\rangle}{\langle q,q\rangle}q = \frac{-27-1+1+27}{\dots}p_0 + \frac{(-3)^4+(-1)^4+1+3^4}{(-3)^2+(-1)^2+1+3^2}p_1 +$$

$$+\frac{(-3)^3\frac{1}{4}(9-5)+(-1)^3\frac{1}{4}(1-5)+1\cdot\frac{1}{4}(1-5)+3\cdot\frac{1}{4}(9-5)}{\left(\frac{1}{4}(9-5)\right)^2+\left(\frac{1}{4}(1-5)\right)^2+\left(\frac{1}{4}(1-5)\right)^2+\left(\frac{1}{4}(9-5)\right)^2}q = \frac{164}{20}p_1 + \frac{0}{\dots}q = \frac{82}{10}p_1 = \frac{41}{5}p_1$$

SVAR: $\frac{41}{5}t$
